Fanning O'quv uslubiy majmuasi O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2019 yil "___" _____dagi ___ -sonli buyrug'i (__ -ilovasi) bilan tasdiqlangan fan dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:	Xashimov A.R.	– TMI, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n.;
	Xolbozorov Q	– TMI, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasi o'qituvchisi.
Taqrizchilar:	Abdullayev O.X.	– O'zbekiston Milliy universiteti, "Differensial tenglamalar va matematik fizika" kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n.;
	Babadjanov Sh.Sh.	– Toshkent moliya instituti, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n.

Fanning O'quv uslubiy majmuasi kafedraning 2019 yil "___" ___________dagi ___-sonli majlisida muhokamasidan o'tkazilgan va Sirtqi bo'lim Kengashida ko'rib chiqishga tavsiya qilingan.

Kafedra mudiri **A.R.Xashimov**

Fanning O'quv uslubiy majmuasi **Sirtqi bo'lim** Kengashining 2019 yil "___" __________ dagi ___-sonli majlisida muhokama etilib, O'quv-uslubiy Kengashi ko'rib chiqishga tavsiya qilingan.

Sirtqi bo'lim boshlig'i **O.Astanakulov**

Kelishildi:

O'quv uslubiy bo'lim boshlig'i **T.M.Baymuratov**

O'quv-uslubiy ishlar bo'yicha prorektor **I.Qo'ziyev**

Fanning O'quv uslubiy majmuasi institut O'quv-uslibiy Kengashining 2019 yil "___"_________ dagi "___" – sonli majlisida muhokama etilib, institut Kengashida ko'rib chiqishga tavsiya qilingan.

Fanning O'quv uslubiy majmuasi institut Kengashining 2019 yil "___"_________ dagi "___" – sonli majlisi bayoni bilan ma'qullangan.

1-mavzu. Matrisa va ular ustida amallar

Reja

1.1. Matritsaga doir asosiy tushunchalar. Matritsalar ustida amallar.

1.2. Texnologik matritsa tushunchasi. Excelda matritsalar ustida amallarni bajarish.

1.3. O'rin almashtirishlar. Determinantning ta'rifi.

1.4. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. Determinantning xossalari.

1.5. Laplas teoremasi. Excelda determinantni hisoblash.

1.6. Matritsa rangi va uning xossalari. Xos va xosmas matritsalar.

1.7. Bazis minor tushunchasi. Teskari matritsa. Teskari matritsani Excelda hisoblash.

Tayanch so'z va iboralar: matritsa, satr matritsa, ustun matritsa, satr-vektor, ustun-vektor, vektor komponenti, nol matritsa, teng matritsa, zanjirlangan matritsalar, kvadrat matritsaning bosh diagonali, diagonal matritsa, skalyar matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, simmetrik matritsa, qiya simmetrik matritsa, texnologik matritsa, determinant, kvadrat matritsa, aniqlovchi, $n-$*tartibli determinant, ikkinchi tartibli determinant, uchinchi tartibli determinant, Sarrus qoidasi, matritsa osti minori, matritsa rangi, xos matritsa, xosmas matritsa, qo'shma matritsa, teskari matritsa*

Matritsa tushunchasi va unga asoslangan matematikaning “Matritsalar algebrasi” bo‘limi amaliyotda, jumladan, iqtisodiyotda katta ahamiyat kasb etadi. Bu shu bilan tushuntiriladiki, aksariyat iqtisodiy obyekt va jarayonlarning matematik modellari matritsalar yordamida sodda va kompakt ko‘rinishida tasvirlanadi.

Matritsa tushunchasi birinchi marta ingliz matematiklari U.Gamilton (1805-1865-y.y.) va A.Kel (1821-1895 y.y.) ishlarida uchraydi. Hozirgi kunda matritsa tushunchasi tabiiy va amaliy jarayonlarning matematik modellarini tuzishda muhim vosita sifatida qo‘llaniladi.

Ta’rif. Matritsa deb m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan qavslar ichiga olingan to‘rtburchakli sonlar jadvaliga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matritsa o‘lchami $m\times n$ kabi yoziladi.Matritsaning $i-$satr, $j-$ustun kesishmasidagi element a_{ij} kabi belgilangan. Demak, $a_{34}-3$ - satr va 4 - ustin kesishmasida joylashgan elementdir.

Ba’zida matritsalarni yozishda (...) qavslar o‘rniga [...] qavslar yoki ||...|| kabi belgilardan foydalaniladi.

Aytaylik quyidagi jadvalda iqtisodiyotning tarmoqlari bo‘yicha resurslarning taqsimlanishi berilgan bo‘lsin:

Resurslar	**Iqtisodiyot tarmoqlari**	
	Sanoat	**Qishloq xo‘jaligi**
Elektr energiyasi resurslari	7,3	5,2
Mehnat resurslari	4,6	3,1
Suv resurslari	4,8	6,1

Bu resurslar taqsimotini matritsa ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin: $A=\begin{pmatrix} 7,3 & 5,2 \\ 4,6 & 3,1 \\ 4,8 & 6,1 \end{pmatrix}$. Bu matritsaning o‘lchami 3×2 bo‘lib, satrlari resurs turlariga ustunlari esa tarmoqlarga mos keladi.

$(1\times n)$ o‘lchamli matritsaga satr matritsa, $(m\times 1)$ o‘lchamli matritsaga esa ustun matritsa deyiladi, ya’ni

$$K=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Bundan tashqari ba’zida bu matritsalar mos ravishda satr-vektor va ustun-vektor deb ham ataladi. Matritsaning elementlari esa vektorlarning komponentlari, deyiladi.

Har bir elementi nolga teng bo‘lgan, ixtiyoriy o‘lchamli matritsaga nolmatritsa deb aytiladi va quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta'rif. A va B matritsalar bir xil o'lchamga ega bo'lib, ularning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, bunday matritsalar teng matritsalar deyiladi va $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. Quyidagi matritsaviy tenglikdan x va y noma'lumlarning qiymatlarini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsalarning mos elementlarini taqqoslab quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$y = 2, \quad x + y = 2 \Rightarrow x = 0.$$

Ta'rif. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A matritsa B matritsa bilan zanjirlangan matritsa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matritsalar zanjirlangan matritsalar bo'ladi. Chunki, A matritsaning o'lchami 3×3 ga, B matritsaning o'lchami 3×2 ga teng.

Shuni ta'kidlash lozimki B va A matritsalar zanjirlangan emas. Chunki, B matritsaning ustunlari soni 2 ga, A matritsaning satrlari soni 3 ga teng bo'lib, o'zaro bir xil emas.

Ta'rif. Ham satrlar soni,ham ustunlar soni n ga teng bo'lgan, ya'ni $n \times n$ o'lchamli matritsa $n-$tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 11 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ matritsa 4-tartibli kvadrat matritsadir.

$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ elementlarning tartiblangan to‘plami kvadrat matritsaning asosiy diagonali deyiladi.Agar $A = (a_{ij})$ kvadrat matritsada $i > j$ $(i < j)$munosabat bajarilganda $a_{ij} = 0$ bo‘lsa, u holda A matritsa yuqori (quyi) uchburchakli matritsa deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{yuqori uchburchakli matritsa})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} (\text{quyi uchburchakli matritsa})$$

$A = (a_{ij})$ kvadrat matritsada $i \neq j$ bo‘lganda, $a_{ij} = 0, i = j$ bo‘lganda, $a_{ij} \neq 0$ bo‘lsa, u holda A matritsaga diagonal matritsa deyiladi ya’ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Agar diagonal matritsaning barcha diagonal elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda bunday matritsaga skalyar matritsa deyiladi ya’ni

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix}.$$

Agar skalyar matritsada $a = 1$bo‘lsa, u holdabunday matritsaga birlik matritsa deyiladi va odatda E harfi bilan belgilanadi, ya’ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

O‘lchamlari aynan teng bo‘lgan matritsalar ustidagina algebraik qo‘shish amali bajariladi.

O‘lchamlari aynan teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{va}\, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsalarni qo‘shish uchun, ularning mos elementlari qo‘shiladi, y’ani

$$A+B=C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani biror haqiqiy λ songa ko‘paytirish uchun bu son matritsaning har bir elementiga ko‘paytiriladi, y’ani

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ikkita matritsa ayirmasi quyidagicha topiladi:

$$A-B=D=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Misol. Quyidagi matritsalarning yig‘indisi va ayirmasini toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matritsalarning o‘lchamlari 2×4 ga teng. Shu sababli bu matritsalarni qo‘shish va ayirish mumkin. Ta’rifga asosan

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Misol. Quyidagi A matritsani $\lambda = 2$ soniga ko‘paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $\lambda \cdot A = 2A = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 16 & 4 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}.$

Misol. Firma 5 turdagi mahsulotni ikkita korxonada ishlab chiqaradi. Firmaning ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4	5
1-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	139	160	205	340	430
2-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	122	130	145	162	152

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilash natijasida ishlab chiqarishni 17% ga oshirdi. Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti qanday bo‘ladi?

Yechish. Firmaning ishlab chiqarish uskunalarini yangilamasdan oldingi ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini quyidagi matritsa ko‘rinishda yozish mumkin:

$$P=\begin{pmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152 \end{pmatrix}.$$

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini topish uchun, bu ishlab chiqarish matritsasini 1,17 ga ko‘paytirish zarur bo‘ladi:

$$1{,}17\cdot P = 1{,}17\cdot\begin{pmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 162{,}63 & 187{,}2 & 239{,}85 & 397{,}8 & 503{,}1 \\ 142{,}74 & 152{,}1 & 169{,}65 & 189{,}54 & 177{,}84 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo‘shish, ayirish, ya’ni algebraik qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallariga matritsalar ustida chiziqli amallardeyiladi.

Matritsalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga bo‘ysinadi:

1) $A+B=B+A$;

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $k(A+B)=kA+kB$;

4) $k(nA)=(kn)A$;

5) $(k+n)A=kA+nA$;

6) $A+\Theta=A$;

7) $A+(-A)=\Theta$;

8) $1\cdot A=A$.

Bu erda $A,B,C-$bir xil o‘lchamli matritsalar, Θ matritsa A,B,C matritsalar bilan bir xil o‘lchamli nol matritsa, $k,n-$ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Faqat va faqat zanjirlangan matritsalar ustida ko‘paytirish amali bajariladi. $m\times p$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ matritsaning $p\times n$ o‘lchamli $B=(b_{jk})$ matritsaga ko‘paytmasideb elementlari $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{ip}b_{pk}$ kabi aniqlanadigan $m\times n$ o‘lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi. Bu formuladan ko‘rish mumkinki, A va B matritsalarning ko‘paytmasi C matritsadagi c_{ik} element A matritsaning $i-$ satrida joylashgan har bir elementni B matritsaning $k-$ ustunida joylashgan mos o‘rindagi elementga ko‘paytirish va hosil bo‘lgan ko‘paytmalarni qo‘shish natijasida aniqlanadi.

Masalan, bizga umumiy holda $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ko‘rinishdagi matritsalar berilgan bo‘lsin. Bu matritsalarni ko‘paytirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Endi buni aniq misollarda ko‘rib chiqamiz.

Misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko‘paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 1.Izlanayotgan $C=AB$ matritsaning c_{11} elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning birinchi ustun mos elementlari bilan ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$c_{11}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=3\cdot1+1\cdot2+1\cdot1=6.$$

2. Izlanayotgan $C=AB$ matritsaning birinchi satr va ikkinchi ustunining elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning ikkinchi ustun elementlari bilan mos ravishda ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng:

$$c_{12}=(3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0=2.$$

3. Birinchi satr va uchinchi ustun elementi

$$c_{13}=(3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=3\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1=-1$$

kabi aniqlanadi.

4. Izlanayotgan matritsaning ikkinchi satr elementlari A matritsaning ikkinchi satr elementlarining B matritsaning mos ravishda 1-,2-,3-ustun elementlari bilan ko‘paytmalarining yig‘indisi sifatida topiladi:

$$c_{21}=\ \ 2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1=6;$$
$$c_{22}=2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0=1;$$
$$c_{23}=2\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot1=1.$$

5. C matritsaning uchinchi satr elementlari ham shunga o‘xshash topiladi:

$$c_{31}=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1=8;$$
$$c_{32}=1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0=-1;$$
$$c_{33}=1\cdot(-1)+2\cdot1+3\cdot1=4.$$

Shunday qilib,

$$C=AB=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\6 & 1 & 1\\8 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko‘paytiring:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matritsalar zanjirlangan bo‘lganligi sababli ular ustida ko‘paytirish amali bajariladi.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+9+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, A va B matritsalarning ko‘paytmasi kommutativlik (o‘rin almashtirish) xossasiga ega emas, ya’ni $AB \neq BA$. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa, AB va BA ko‘paytmalarini topish mumkin. Agar A va B matritsalar uchun $AB = BA \left(AB = -BA \right)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda A va B matritsalar kommutativ (antikommutativ) matritsalar deyiladi. Masalan, E birlik matritsa ixtiyoriy A kvadrat matritsa bilan kommutativdir. Haqiqatan ham

$$AE = EA = A.$$

Matritsalarni ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1) $(kA)B = k(AB) = A(kB)$;

2) $(A+B)C = AC + BC$;

3) $A(B+C) = AB + AC$;

4) $A(BC) = (AB)C$.

Keltirilgan xossalardan to‘rtinchisini quyidagi misol yordamida tekshiramiz.

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin:

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix}$,

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix},$$

2. $BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ko‘rinib turibdiki, ikki xil hisoblash usulida ham natija bir xil.

A kvadrat matritsani $m\left(m>1\right)$butun musbat darajaga ko‘tarish quyidagicha amalga oshiriladi: $A^m = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ marta}.$

Agar A matritsada barcha satrlari matritsaning mos ustunlari bilan almashtirilsa, u holda hosil bo‘lgan A^T matritsa A matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi.

Transponirlangan matritsalar quyidagi xossalarga ega:

1)$\left(A^T\right)^T = A,$

2)$(kA)^T = kA^T,$

3$(A+B)^T = A^T + B^T,$

4$(AB)^T = B^T A^T.$

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘ladi.

Agar Akvadrat matritsa uchun $A=A^T$munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bu matritsaga simmetrik matritsadeyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ simmetrik matritsaning elementlari bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan.

$n-$tartibli simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko‘pi bilan $\frac{n(n+1)}{2}$ ga teng, bunda $n-$natural son.

Agar A kvadrat matritsada $A=-A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bunday matritsaga qiya simmetrik matritsa deb ataladi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$n-$tartibli qiya simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko‘pi bilan n^2-n+1 formula yordamida topiladi, bunda $n-$natural son.

Ta’rif. Nolmas satrlarga ega A matritsada har qanday $k-$ nolmas satrning birinchi noldan farqli elementi $\left(k-1\right)-$ nolmas satrning birinchi noldan farqli elementidan o‘ngda tursa, u holda A pog‘onasimon matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0\end{pmatrix}$ matritsapog‘onasimon matritsadir.

Iqtisodiy masalalarni matematik modellashtirishda, ya’ni, iqtisodiy muammoni matematik ifodalar yordamidagi ifodasida, matritsalardan keng foydalaniladi. Bunda muhim tushunchalardan biri texnologik matritsa tushunchasidir. Bu matritsa, masalan, bir nechta turdagi resurslardan bir nechta mahsulot turlarini ishlab chiqarishni rejalashtirish (programmalashtirish), tarmoqlararo balansni modellashtirish kabi muhim iqtisodiy masalalarda asosiy rolni o‘ynaydi.

Faraz qilaylik o‘rganilayotgan iqtisodiy jarayonda n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil ishlab chiqarish faktorlari (resurslar) zarur bo‘lsin. $i-$mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun $j-$turdagi resursdan a_{ij} miqdori sarflansin. a_{ij} elementlardan tuzilgan $m\times n$ o‘lchamli A matritsa texnologik matritsa deb ataladi.

1-turdagi mahsulotdan x_1 miqdorda, 2-turdagi mahsulotdan x_2 miqdorda, ..., $n-$turdagi mahsulotdan x_n birlik miqdorda ishlab chiqarilishi talab qilinsin. Bu rejani $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}$ ustun vektor ($n\times 1$ o‘lchamli matritsa) shaklida ifodalaymiz. U holda 1-turdagi resurs sarfi $a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n$ ga, ikkinchi turdagi resurs sarfi $a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n$ ga teng. Umumlashtiradigan bo‘lsak, ishlab chiqarish rejasini bajarish uchun zarur bo‘lgan $j-$turdagi resurs sarfi $a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n$ birlikka teng. Bu miqdorlarni ustun vektor sifatida yozsak aynan AX ko‘paytmani hosil qilamiz.

$j-$mahsulotning bir birligining narxi c_j bo‘lsin. Narxlar vektorini $C=(c_1,\ldots,c_n)$ ko‘rinishda ifodalaymiz. U holda CX ko‘paytma, matritsalarni ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, skalyar miqdor, ya’ni sondan iborat. Bu son ishlab chiqarishdan olingan daromadni ifodalaydi.

$i-$ turdagi resurs zahirasi miqdori b_i birlikka teng bo‘lsin. Resurs zahiralari vektorini ustun vektor shaklida ifodalaymiz: $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix}$. U holda $AX\le B$ tengsizlik ishlab chiqarishda resurs zahiralari hisobga olinishi zarurligini bildiradi. Bu vektor tengsizlik AX vektorning har bir elementi B vektorning mos elementidan katta emasligini bildiradi. $AX\le B$ shartni qanoatlantiruvchi X rejani joiz reja, deb ataymiz.

Ma’nosidan kelib chiqadigan bo‘lsak, har qanday X rejaning elementlari musbat sonlardan iborat bo‘lishi zarur.

Misol. Korxona ikki turdagi transformatorlar ishlab chiqaradi. 1-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 5 kg temir va 3 kg sim, 2-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 3 kg temir va 2 kg sim sarflanadi. Bir birlik transformatorlarni sotishdan mos ravishda 6 va 5 sh.p.b. miqdorida daromad olinadi. Korxonaning omborida 4,5 tonna temir va 3 tonna sim mavjud. Texnologik matritsa, narxlar vektori va resurs zahirasini ifodalovchi vektorni tuzing. $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejalar joiz reja bo‘la oladimi?

Yechish. Korxona ikki turdagi resursdan foydalanib 2 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Narxlar vektori $C=(6,5)$. Resurs zahiralari vektori $B=\begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix}$ Texnologik (resurs sarfi normasi) matritsa $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. Bu rejani bajarishdagi resurs sarfi

$$AX=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x_1+3x_2 \\ 3x_1+2x_2 \end{pmatrix}$$

ga teng. Bu sarf zahiradan oshib ketmasligi kerak, ya’ni $AX \le B$ yoki

$$5x_1+3x_2 \le 4500,$$
$$3x_1+2x_2 \le 3000.$$

Joiz reja yuqoridagi tengsizliklarni qanoatlantirishi zarur.

1) $X=\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4300 \\ 2700 \end{pmatrix}<\begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix},$$

ya’ni bu reja joiz reja. Bu reja asosida olinadigan daromad miqdori $CX=(6 \quad 5)\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}=(6000)$ sh.p.b. ga teng.

2) $X=\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

Bundan ko‘rish mimkinki, 1-turdagi resurs sarfi 4800 ga teng bo‘lib, resurs zahirasi 4500 dan katta. Shu sababli, qaralayotgan reja joiz reja emas.

Misol. Korxona m turdagi resurslarni qo‘llab, n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. $j-$turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga ketgan $i-$xom ashyo resurslari harajatlarining normalari $A_{m\times n}$ matritsa bilan berilgan. Vaqtning ma’lum oralig‘ida korxona har bir turdagi mahsulotdan x_{ij} miqdorini ishlab chiqargan bo‘lsin. Uni $X_{n\times 1}$ matritsa bilan ifodalaymiz.

Vaqtning berilgan davrida barcha mahsulotning har bir turini ishlab chiqarishga ketgan resurslarning to‘la harajatlar matritsasi S ni aniqlang. Berilgan

$$A_{4\times 3}=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix},\ X_{3\times 1}=\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix}.$$

Yechish. Resurslarning to‘la harajatlar matritsasi S A va X matritsalarning ko‘paytmasi sifatida aniqlanadi, ya’ni $S=AX$.

Berilgan masalaning sharti bo‘yicha

$$S=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}930\\960\\450\\690\end{pmatrix}.$$

Berilgan vaqt orlig‘ida 930 birlik I turdagi resurs, 960 birlik II turdagi resurs, 450 birlik III turdagi resurs, 690 birlik IV turdagi resurs sarf qilingan.

Misol. Korxona mahsulotning n turini ishlab chiqaradi, ishlab chiqariladigan mahsulot hajmlari $A_{1\times n}$ matritsa bilan berilgan. $j-$mintaqada mahsulotning $i-$turi birligining sotilish narxi $B_{n\times k}$ matritsa bilan berilgan, bu yerda $k-$mahsulot sotilayotgan mintaqalar soni.

Mintaqalar bo‘yicha daromad matritsasi C ni toping.

$$A_{1\times 3}=(100,200,100);\ B_{n\times k}=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}\text{bo‘lsin.}$$

Yechish. Daromad $C_{1\times k}=A_{1\times n}\cdot B_{n\times k}$ matritsa bilan aniqlanadi, $c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}\cdot b_{ij}-$bu $j-$mintaqada korxonaning daromadi quyidagicha:

$$C=(100,200,100)\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}=(600,1300,700,1300).$$

MS Excel dasturida matritsalarni qo‘shish, songa ko‘paytirish va matritsalarni ko‘paytirishga misollar keltiramiz.

1) $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&3&2\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}0&4&3\\2&-2&3\end{pmatrix}$ matritsalarni qo‘shish talab qilinsin.

I) Matritsalarni quyidagi ko‘rsatilgan jadvallar shaklida MS Excelga kiritamiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		0	4	3
6	B=	2	-2	3

II) Biror katakka matritsalarning 1-elementlari yig’indisini topish uchun formula kiritamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			=B2+B5		
4						A+B=			
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

III) 2x3 o‘lchamli jadvalni bu katakdagi formulani avtomatik ko‘chirish usuli bilan to‘ldiramiz. Buning uchun sichqonchani bu katakning pastki o‘ng burchagiga keltiramiz. Qalin qora kursor (krestik) paydo bo‘lganda sichqonchaning chap tugmasini bosamiz va oldin satr bo‘yicha uch katakka, keyin ustun bo‘yicha ikki kattakka tortamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			1	1	8
4						A+B=	4	1	5
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

Natijada matritsalarning yig’indisi hosil bo‘ladi.

2) Yuqoridagi A matritsani 2 ga ko‘paytiramiz. Buning uchun A matritsani 2 ga ko‘paytirish formulasini biror katakka kiritamiz. Bu katakdagi formulani yuqorida tushuntirilgan usulda avtomatik to‘ldiramiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		=B2*2		
6	2A=			
7				

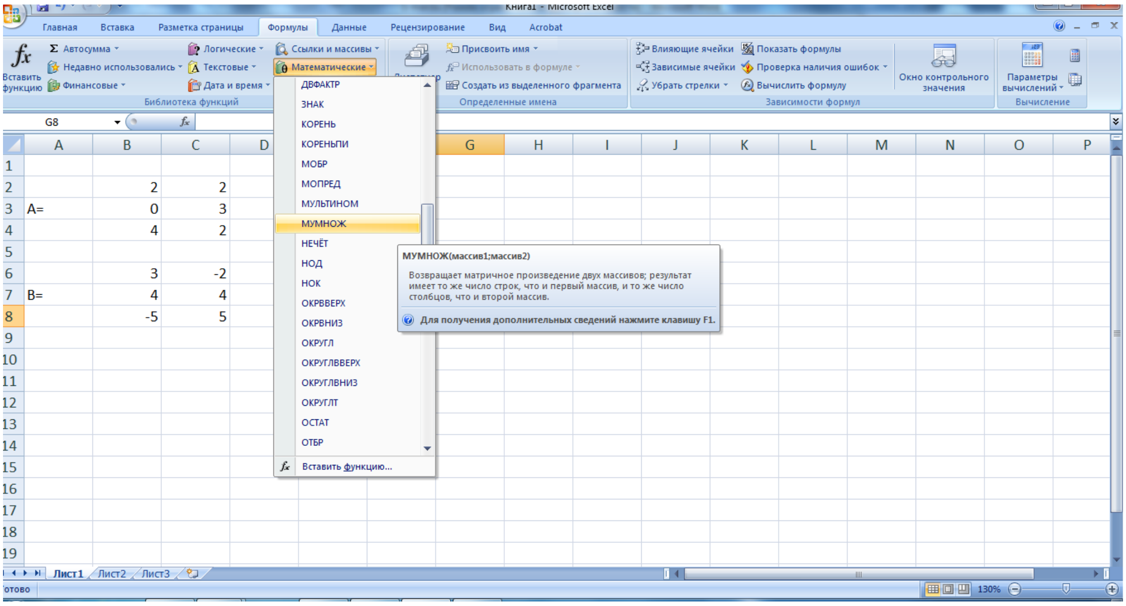
	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		2	-6	10
6	2A=	4	6	4
7				

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. AB ko‘paytmani topamiz. A matritsa o‘lchamlari 3×3 va B matritsa o‘lchamlari 3×2 bo‘lganligi sababli, ko‘paytmaning o‘lchamlari 3×2 bo‘ladi.

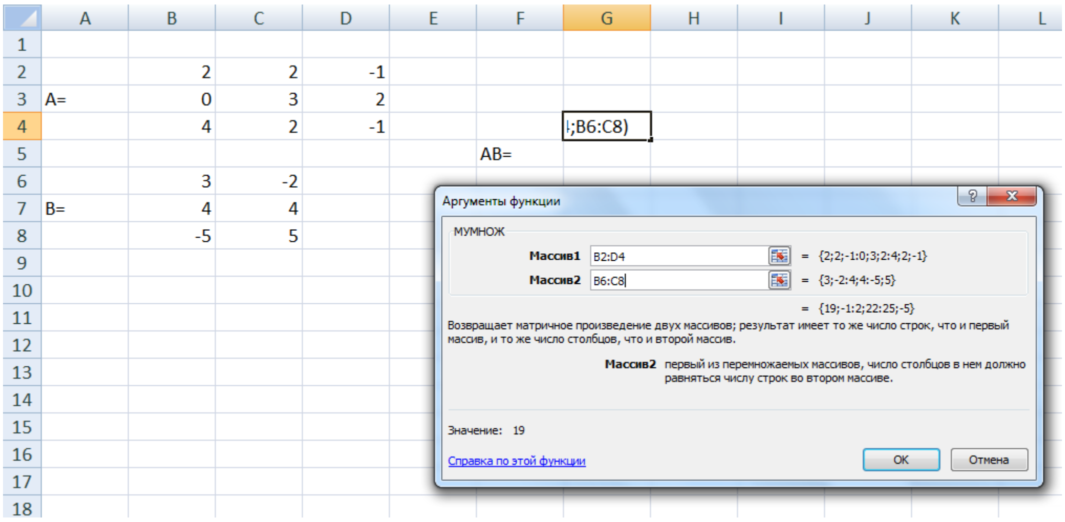
I) A va B matritsalarni Excelda jadval shaklida kiritamiz.

	A	B	C	D	E
1					
2		2	2	-1	
3	A=	0	3	2	
4		4	2	-1	
5					
6		3	-2		
7	B=	4	4		
8		-5	5		
9					

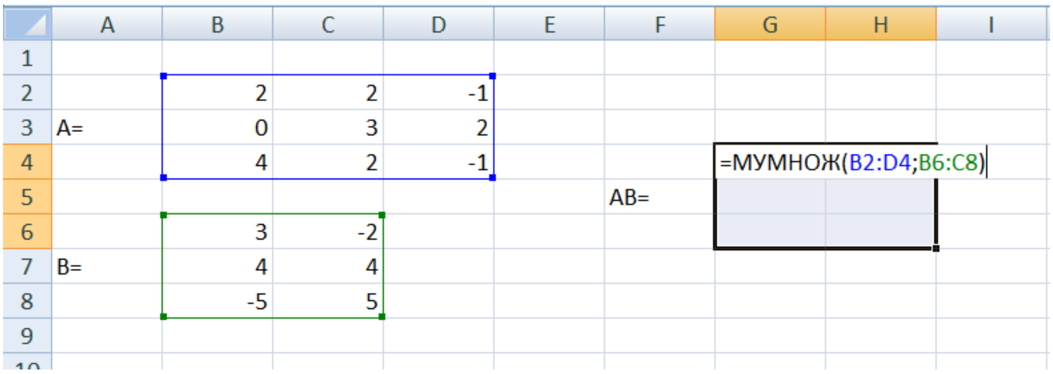
II) Excel funksiyalari ro‘yxatidan matematik funksiyalar ro‘yxatini topamiz. bu ro‘yxatdan "МУМНОЖ"funksiyani tanlaymiz.



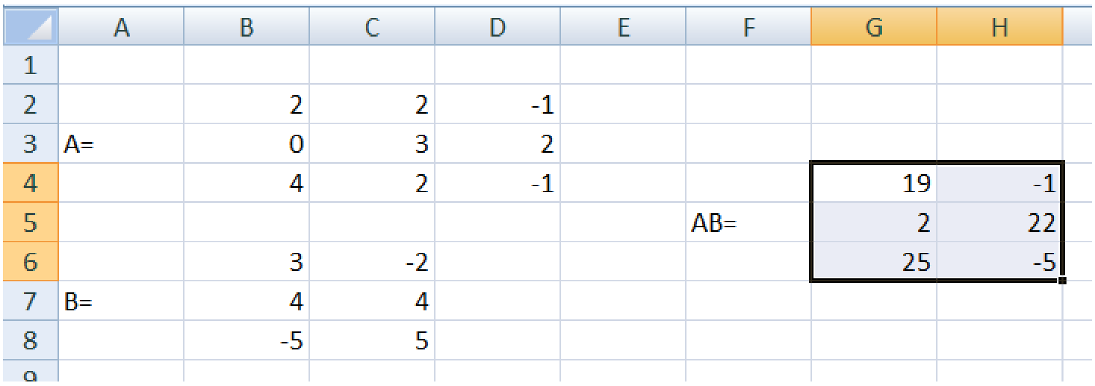
III) Hosil bo‘lgan yangi oynachada 'Массив1' qatoriga A matritsa koordinatalarini, 'Массив2' qatoriga B matritsa koordinatalarini kiritamiz. Enter tugmasini bosamiz.



IV) Bunda funksiya kiritilgan katakda ko‘paytmaning faqat bitta elementi hosil bo‘ladi. Boshqa elementlarni topish uchun ko‘paytma o‘lchovlariga mos uchta satr va uchta ustunli jadvalni rasmdagiday belgilaymiz va F2 tugmasini bosamiz.



v) Ctrl+Shift+Enter tugmalarni bir paytda bosamiz. Belgilangan kataklarda matritsalar ko‘paytmasi hosil bo‘ladi.



Demak, $AB = \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 2 & 22 \\ 25 & -5 \end{pmatrix}.$

A kvadrat matritsaning skalyar (sonli) miqdorni aniqlovchi determinant tushunchasining kiritilishi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish bilan chambarchas bog‘liq.

$n-$tartibli o‘rin almashtirish tushunchasini kiritamiz. $1,2,3,\ldots,n$ sonlarning biror bir tartibda yozilishi $n-$tartibli o‘rin almashtirish deb ataladi.

Masalan $\{1,2,3,4\}$ to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plamdagi o‘rin almashtirishlar $P_1=(2,3,1,4)$, $P_2=(3,2,4,1)$, $P_3=(3,1,2,4)$ va hakozo.

Umuman olganda har qanday n ta elementdan tuzilgan to‘plamda o‘rin almashtirish tushunchasini kiritish mumkin. Bu jarayonni to‘plam elementlarini 1 dan boshlab ketma-ket natural sonlar bilan nomerlaymiz va $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o‘rin almashtirishga keltiramiz. Ya’ni, $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o‘rin almashtirish tushunchasini qarash umumiylikni buzmaydi.

Ta’rif. Agar $m>k$ bo‘lib, m soni k dan chaproqda joylashgan bo‘lsa, u holda P o‘rin almashtirishda m va k sonlar inversiyani tashkil qiladi deyiladi.

Ta’rif. P o‘rin almashtirishdagi barcha elementlar tashkil etgan umumiy inversiyalar soni P o‘rin almashtirishning inversiyalar soni, deb ataladi va $inv\,P$ kabi belgilanadi.

$inv\,P$ sonning juft yoki toq bo‘lishiga qarab, mos ravishda, P o‘rin almashtirish juft yoki toq deb ataladi.

Masalan, $P=(1,4,3,2)$ o‘rin almashtirishda 1 va 4 sonlari inversiya tashkil qilmaydi. 3 soniga mos inversiyalar 1 ta, 2 soniga mos inversiyalar 2 ta. Demak, $inv\,P=1+2=3$. P o‘rin almashtirish toq.

O‘rin almashtirish quyidagi xossalarga ega:

1. $\{1,2,3,...,n\}$ to‘plamdagi barcha o‘rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng;
2. Juft va toq o‘rin almashtirishlar soni o‘zaro teng, ya’ni har biri $\frac{n!}{2}$ tadan;
3. O‘rin almashtirishda ikkita elementning o‘rni almashtirilsa uning juft-toqligi o‘zgaradi.

Ta’rif. $\{1,2,3,...,n\}$ sonlar to‘plamini o‘ziga akslantiruvchi o‘zaro bir qiymatli akslantirish o‘rinlashtirish deb ataladi.

O‘rinlashtirishni ikkita o‘rin almashtirish bilan berishimiz mumkin. Ikkita P_1 va P_2 $n-$ tartibli o‘rin almashtirishlardan tuzilgan F o‘rinlashtirish quyidagicha belgilanadi: $F=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

Masalan, $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $F_1=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ o‘rinlashtirishlar o‘zaro teng. Chunki bu o‘rinlashtirishlarning har biri 1 ga 2 ni, 2 ga 3 ni va 3 ga 1 ni mos qo‘yadi.

O‘rinlashtirishni har doim $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ ko‘rinishga keltirish mumkin. Bunda $P_2=(i_1,i_2,...,i_n)$ biror $n-$ tartibli o‘rin almashtirish. P_2 almashtirish juft bo‘lsa, F o‘rinlashtirish juft, P_2 toq bo‘lsa, F ham toq deyiladi. $h(F)=(-1)^{inv\,P_2}$ miqdorga F o‘rinlashtirishning signaturasi deyiladi. $n-$ tartibli barcha o‘rinlashtirishlar to‘plamini S_n bilan belgilaymiz.

Endi $n-$ tartibli determinant tushunchasini kiritamiz.

Bizga $n-$tartibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Barcha mumkin bo‘lgan turli $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ o‘rinlashtirishlarga mos $h(F)a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}...a_{ni_n}$ ko‘rinishdagi ko‘paytmalarning yig‘indisidan iborat songa $n-$tartibli determinant deyiladi.

$n-$tartibli determinant $\det(A)$, $|A|$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi.

O‘rinlashtirish va o‘rin almashtirishlarning xossalariga asosan, bu ta’rifdan

1) $n-$tartibli determinant $n!$ ta hadning yig‘indisidan iborat;

2) bu yig‘indining har bir hadi matritsaning turli satrlari va turli ustunlarida joylashgan n ta elementi ko‘paytmasidan iborat;

3) yuqorida aytilgan ko‘paytmalarning yarmi ($n!/2$ tasi) o‘z ishorasi bilan, qolgan yarmi qarama-qarshi ishora bilan olingan.

Bundan ko‘rinib turibdiki, determinantni ta’rif bo‘yicha hisoblash juda ko‘p amallardan iborat bo‘lib, ma’lum noqulayliklarga ega. Misol uchun 4- tartibli determinant $4!=24$ ta haddan iborat. Har bir hadi matritsaning turli satr va ustunlaridan olingan 4 ta elementi ko‘paytmasidan iborat. Bu hadlarning har birining ishorasini topish uchun 24 ta o‘rinlashtirishning juft-toqligi aniqlanishi talab qilinadi.

Shu sababdan determinantni uning ba’zi xossalaridan foydalanib hisoblash qulayroq. Bu xossalarni berishdan oldin ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni alohida qarab o‘tamiz.

$2-$tartibli kvadrat matritsaning determinanti quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Haqiqatan, ikkinchi tartibli turli o‘rinlashtirishlar soni $2!=2$ ta. Bular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bulardan birinchisi juft, ikkinchisi esa toq. Shu sababli determinant $a_{11}a_{22}$ va $-a_{12}a_{21}$ sonlarning yig‘indisidan iborat.

Misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 6\cdot 8 - 10\cdot 9 = 48 - 90 = -42.$

Endi uchinchi tartibli determinantni qaraymiz. Uchinchi tartibli turli oʻrinlashtirishlar soni $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ ta. Bular

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

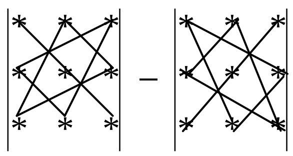
Bu oʻrinlashtirishlarning ikkinchi satridagi oʻrin almashtirishlarni qaraymiz. S_1 da $P_1 = (1,2,3)$ boʻlib, $inv\, P_1 = 0$, S_2 da $P_2 = (2,3,1)$ boʻlib, $inv\, P_2 = 0+0+2 = 2$ S_3 da $P_3 = (3,1,2)$ boʻlib, $inv\, P_3 = 0+1+1 = 2$. Demak, S_1, S_2 va S_3 lar juft boʻlib, ularga mos signaturalar 1 ga teng. Shu sababli determinantni ifodalovchi yigʻindida bu uchta oʻrinlashtirishga mos $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ va $a_{13}a_{21}a_{32}$ koʻpaytmalar oʻz ishorasi bilan olinadi. Juft va toq oʻrin almashtirishlar soni teng boʻlganligi sababli, qolgan uchta S_4, S_5 va S_6 lar toq va ularga mos $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ va $a_{11}a_{23}a_{32}$ koʻpaytmalar qarama-qarshi ishora bilan olinishi kerak.

Yuqoridagilarni umumlashtirsak, uchinchi tartibli determinant uchun quyidagi ifodani olamiz:

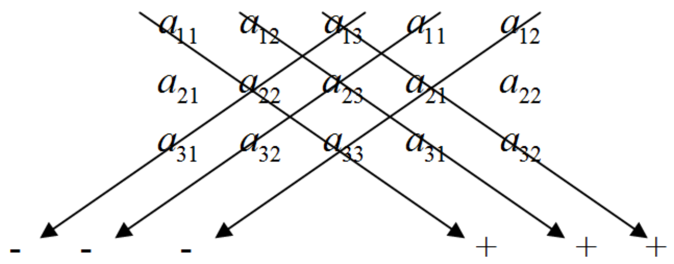
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Uchinchi tartibli determinantda oʻz ishorasi va qarama-qarshi ishora bilan olinadigan hadlarni eslab qolish uchun odatda ikki xil usuldan foydalaniladi. Bular uchburchak va Sarrus usullari deb nomlanadi.

Uchburchak usuli. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning uchburchak usuli quyidagicha sxematik koʻrinishda amalga oshiriladi:

$\Delta = +$ 

Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrus qoidasi quyidagicha amalga oshiriladi. Determinant ustunlarining oʻng yoniga chapdagi birinchi va ikkinchi ustunlar koʻchirib yoziladi. Hosil boʻlgan kengaytirilgan jadvalda bosh diagonal yoʻnalishida joylashgan elementlar ko‘paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo‘nalishidagi elementlar ko‘paytirilib manfiy ishora bilan olinib yig‘indi tuziladi. Bu yig‘indi uchinchi tartibli determinantning qiymatidan iborat. Buni sxema ko‘rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:



Misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 4\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 1 = 27.$

Determinant quyidagi xossalarga ega:

1. Agar determinant biror satri (ustuni) ning barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot 4\cdot 3 + 7\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 3 - 6\cdot 4\cdot 0 - 7\cdot 0\cdot 2 = 0.$$

2. Diagonal matritsaning determinanti diagonal elementlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

3. Yuqori (quyi) uchburchakli matritsalarning determinantlari uning bosh diagonal elementlari ko‘paytmasiga teng, ya’ni $\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60.$

4. Determinantning biror satri (ustuni) elementlarini $k \neq 0$ songa ko‘paytirish determinantni shu songa ko‘paytirishga teng kuchlidir yoki biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

Masalan, $3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (24 + 60 + 56 - 18 - 70 - 64) = -36.$

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72 + 180 + 168 - 54 - 192 - 210 = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 7 & 3 \\ 3 \cdot 5 & 6 & 8 \\ 3 \cdot 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72 + 180 + 168 - 54 - 192 - 210 = -36.$$

5. $n-$tartibli determinant uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$$\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$$

6. Determinantda ikkita satr (ustun) o‘rinlari almashtirilsa, determinantning ishorasi o‘zgaradi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 39.$

Endi bu matritsada birinchi va uchinchi ustunlarining o‘rinlarini almashtiramiz, u holda

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3-12-20-2-20+18=-39.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, determinantlar faqat ishorasi bilan farq qiladi.

7. Agar determinant ikkita bir xil satr (ustun)ga ega bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 45+36+150-36-150-45=0.$

8. Agar determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun)ning mos elementlarini biror songa ko‘paytirib qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & 5+3\cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Haqiqatan ham, tenglikning chap tarafi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4+30+30-36-4-25=-1.$$

tenglikning o‘ng tarafi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & 5+3\cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8+66+60-72-55-8=-1.$$

Demak tenglik o‘rinli.

9. Agar determinant ikki satri (ustuni)ning mos elementlari proporsional bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+192+192-72-192-192=0.$$

10. Transponirlash natijasida determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39.$$

11. Agar determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikki qo‘shiluvchi yig‘indisidan iborat bo‘lsa, u holda determinant ikki determinant yig‘indisiga teng bo‘lib, ulardan birining tegishli satri (ustuni) birinchi qo‘shiluvchilaridan, ikkinchisining tegishli satri (ustuni) ikkinchi qo‘shiluvchilaridan iborat bo‘ladi, ya’ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

12. Agar determinant satr (ustun)laridan biri uning qolgan satr (ustun) larining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, determinant nolga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\cdot 2+4\cdot 3 \\ -2 & 1 & -2\cdot 2+4\cdot 1 \\ 3 & -2 & 3\cdot 2-4\cdot 2 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Toq tartibli har qanday qiya simmetrik matritsaning determinanti nolga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0+60-60+0+0+0=0.$$

14. Bir xil tartibli ikkita matritsalar ko‘paytmasining determinanti, bu matritsalar determinantlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B).$$

Bizga $n-$tartibli kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. $n-$tartibli A kvadrat matritsaning $1\le k\le n-1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k ta satrlari va k ta ustunlari kesishgan joyda turgan elementlardan tashkil topgan $k-$tartibli matritsaning determinanti d determinantning $k-$tartibli minori deb ataladi.

$k-$tartibli minor sifatida A kvadrat matritsaning $n-k$ ta satr va $n-k$ ta ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinant, deb ham qarash mumkin.

Ta’rif. Matritsaning diagonal elementlari yordamida hosil bo‘lgan minorlar bosh minorlar deb ataladi.

Ta'rif. $n-$tartibli A kvadrat matritsada $k-$tartibli M minor turgan satrlar va ustunlar o'chirib tashlangandan so'ng qolgan $(n-k)-$tartibli M' minorga M minorning to'ldiruvchisi deyiladi va aksincha.

M minor va uning M' to'ldiruvchi minorini sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \boxed{M} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Shunday qilib, determinantning o'zaro to'ldiruvchi minorlar jufti haqida gapirish mumkin. Xususiy holda, a_{ij} element va determinantning $i-$satri va $j-$ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan $(n-1)-$tartibli minor o'zaro to'ldiruvchi minorlar juftini hosil qiladi.

Ta'rif. a_{ij} minorning (elementning) algebraik to'ldiruvchisi deb $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ songa aytiladi.

Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

Bu formulaga Δ determinantni i satr elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyiladi.

Determinantning biror satr (ustun) elementlari bilan uning boshqa satri (ustuni) elementlari algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng.

Misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoysak

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2A_{11} + A_{12} + 3A_{13} = 2(-1)^{1+1} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + 3(-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(9-8) - (15-2) + 3(20-3) = 2 - 13 + 51 = 40.$$

Misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni ikkinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib chiqamiz. Bu ustunda 2 ta noldan farqli element bo‘lgani uchun natijada 2 ta 3-tartibli determinant hosil bo‘ladi.

$$\Delta = -1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yoki avval $a_{32} = 2$ elementni nolga keltirishimiz mumkin. Buning uchun 2-satrni 2 ga ko‘paytirib 3-satrga qo‘shamiz va hosil bo‘lgan determinantni 2-ustun elementlariga nisbatan yoyamiz va hisoblaymiz:

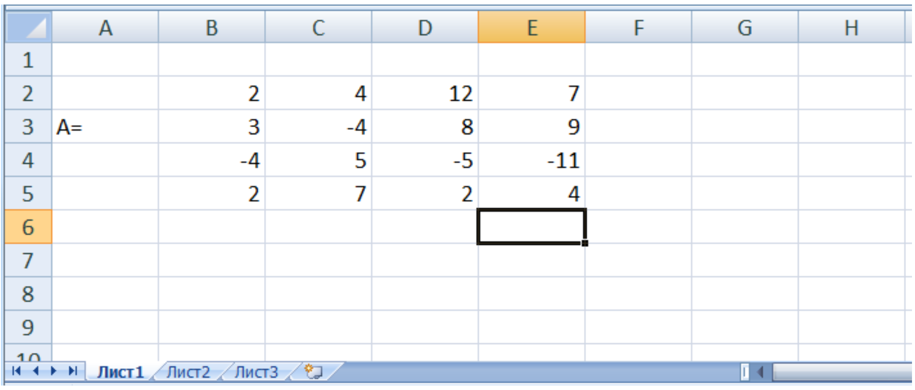
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -21.$$

Ko‘rinib turibdiki, Laplas teoremasidan yuqorida keltirilgan xossalar bilan birgalikda foydalanish determinantni hisoblashni ancha osonlashtiradi. Buning uchun biror satr yoki ustunni tanlab olib, shu ustun yoki satrdagi elementlarni determinantning xossalaridan foydalanib iloji boricha nollarga keltirishimiz kerak bo‘ladi. So‘ngra, Laplas teoremasi yordamida determinantning tartibini bittaga kamaytirishimiz mumkin.

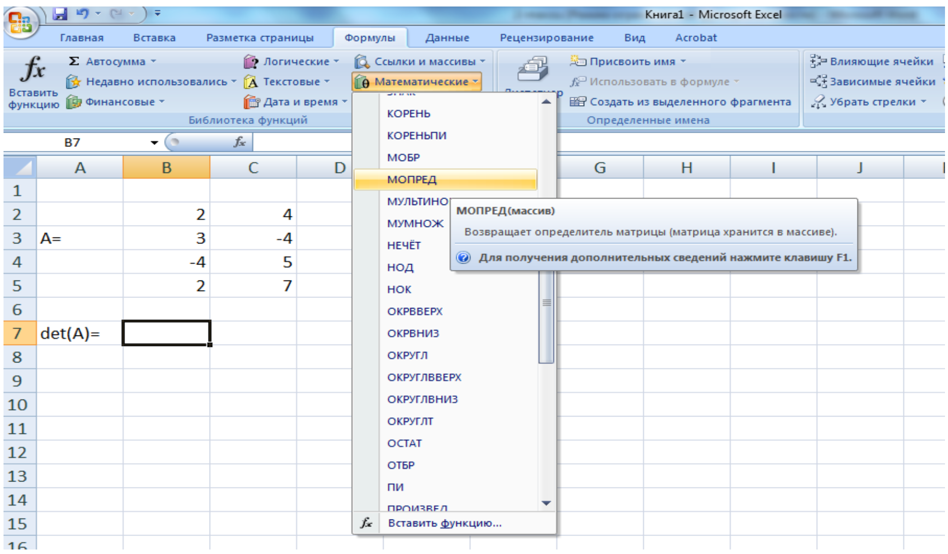
Determinantni Excelda hisoblash usuli bilan tanishib chiqamiz.

Misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 & 7 \\ 3 & -4 & 8 & 9 \\ -4 & 5 & -5 & -11 \\ 2 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning determinantini hisoblang.

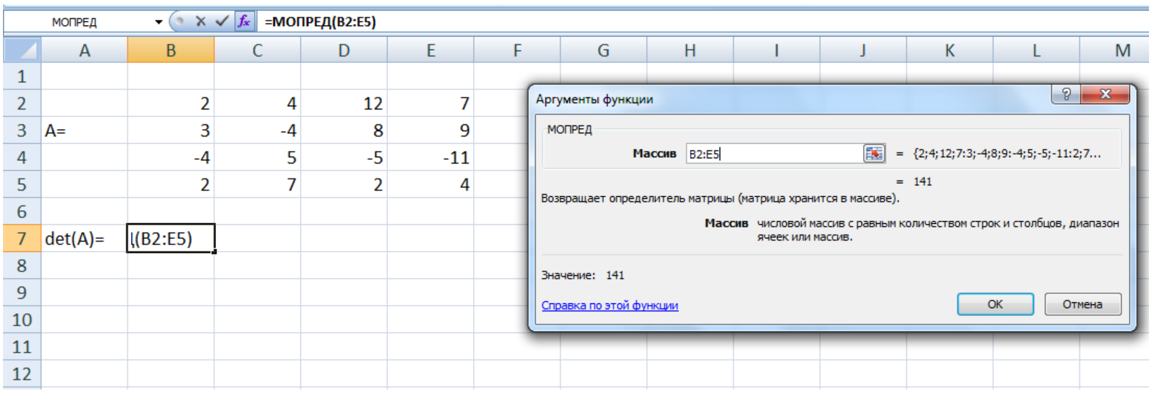
I. Matritsani Excel dasturida jadval shaklida kiritamiz;



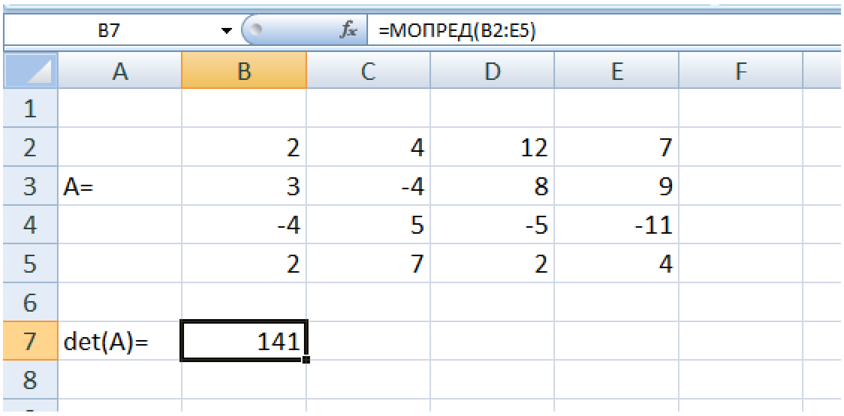
II. Biror katakni tanlaymiz. Matematik funksiyalar ro‘yxatidan “МОПРЕД” funksiyasini tanlaymiz.



III. Hosil bo‘lgan oynada massiv qatoriga matritsa joylashgan koordinatalarni kiritamiz.



Enter tugmasi bosilsa, determinant qiymati hosil bo‘ladi.



Determinant qiymati 141 ga teng ekan.

Ixtiyoriy o‘lchamli matritsaning bir necha satr yoki ustunlarini o‘chirishdan hosil bo‘lgan kvadrat matritsa determinantiga matritsa osti minori deyiladi. Bu kvadrat matritsa tartibi matritsa osti minorning tartibi deyiladi. Agar berilgan matritsa kvadrat shaklda bo‘lsa, uning eng katta tartibli minori o‘ziga teng.

Masalan: $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning 1-satr va 1-ustunini o‘chirishdan 2-tartibli minor $M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$, 2-satr va 3-ustunini o‘chirishdan 2-tartibli minor $M_{23}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ va hokazo minorlarni hosil qilish mumkin.

Ta’rif. A matritsaning rangi, deb noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $rang\left(A\right)=r(A)$ ko‘rinishida ifodalanadi.

Matritsa rangining xossalari:

1) agar A matritsa $m\times n$ o‘lchovli bo‘lsa, u holda $rangA\le\min(m;n)$;
2) A matritsaning barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda $rangA=0$;
3) agar A matritsa $n-$tartibli kvadrat matritsa va $|A|\ne 0$ bo‘lsa, u holda $rangA=n$.

Misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan matritsa (3×2) o‘lchamli bo‘lgani uchun satrlar va ustunlar sonini taqqoslaymiz va kichigini, ya’ni 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning qiymatini hisoblaymiz. Bu jarayonni noldan farqli ikkinchi tartibli minor topilguncha davom ettiramiz:

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0,\quad M_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}=-1\ne 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta’rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng, ya’ni $rang(A)=2$.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi almashtirishlar bajarganda o‘zgarmaydi:

1. matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko‘paytirganda;
2. matritsa satrlari (ustunlari) o‘rinlari almashtirilganda;
3. matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror noldan farqli songa ko‘paytirib, so‘ngra qo‘shganda;
4. barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborganda;
5. matritsa transponirlanganda.

Teorema. Elementar almashtirishlar matritsa rangini o‘zgartirmaydi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

matritsada birinchi satrni 2 ga va ikkinchi satrni -3 ga ko‘paytirib, birinchini ikkinchiga qo‘shsak, so‘ngra yana birinchi satrni 5 ga, uchunchi satrni 3 ga ko‘paytirib, natijalarni qo‘shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo‘ladi.

Bu matritsada ikkinchi satrni 1 ga, uchunchi satrni 5 ga ko‘paytirib, ikkinchi satrni uchunchi satrga qo‘shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo‘ladi. Yana

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsani olib, yuqoridagi singari almashtirishlarni bajarsak,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hosil bo‘ladi.

A va B matritsaga qo‘llanilgan almashtirishlarning mohiyati quyidagidan iborat: m satrli matritsa berilgan holda birinchi va ikkinchi satrlarni, undan keyin birinchi va uchinchi satrlarni, ..., nihoyat, birinchi va $m-$ satrlarni shunday sonlarga ko‘paytiramizki, tegishli songa ko‘paytirilgan birinchi satrni navbat bilan boshqa hamma satrlarga qo‘shganimizda ikkinchi satrdan boshlab birinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. So‘ngra ikkinchi satr yordamida keyingi hamma satrlar bilan yana shunday almashtirishlarni bajaramizki, uchinchi satrdan boshlab, ikkinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. Undan keyin to‘rtinchi satrdan boshlab uchinchi ustun elementlari nollarga aylanadi va hokazo. Shu tariqa bu jarayon oxirigacha davom ettiriladi.

Agar matritsaning qandaydir satrlari boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo‘lsa, u holda shu almashtirishlar natijasida, bunday satrlarning hamma elementlari nollarga (ya’ni bunday satrlar nol satrlarga) aylanadi.

Birorta elementi noldan farqli satrni nolmas satr, deb atasak, yuqoridagi almashtirishlardan keyin hosil bo‘lgan matritsaning rangi nolmas satrlar soniga teng bo‘ladi, chunki bunday satrlar chiziqli erkli satrlarni bildiradi.

Yuqorida qo‘llaniladigan almashtirishlar matritsani elementar almashtirishlardan iborat bo‘lgani uchun, ular matritsaning rangini o‘zgartirmaydi.

Teorema. Pog‘onasimon matritsaning rangi uning nolmas satrlari soniga teng.

Ixtiyoriy matritsaning rangini aniqlash uchun yuqorida ko‘rsatilgan qoida bo‘yicha elementar almashtirishlar yordamida matritsa pog‘onasimon matritsaga keltiriladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

bu yerda $a_{ii}\neq 0,\ \ i=1,\dots,r,\ \ \ r\leq k.$

Pog‘onasimon matritsaning rangi r ga teng.

Masalan, yuqoridagi misollarda $r\left(A\right)=3, r\left(B\right)=2$ bo‘ladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matritsa pog‘onasimon matritsaga keltirildi. Uchinchi satr barcha elementlari nollardan iborat bo‘lganligi sababli, berilgan matritsa rangi ikkiga teng.

Matritsa yordamida vektorlar sistemasining rangi bilan tanishib chiqamiz: o‘lchamlari teng bir necha vektorlardan tuzilgan $A_i=(a_{1i}, a_{2i},\dots a_{mi})^T$, $i=1,2,\dots,n,$ ustun vektorlar sistemasini qaraymiz.

Ta’rif. Vektorlar sistemasining rangi, deb shu vektorlar koordinatalari yordamida tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa rangiga aytiladi va $r(A_1, A_2, ..., A_n)$ ko‘rinishida belgilanadi.

Izoh. Xuddi shuningdak, satr vektorlar sistemasi ham qaralishi mumkin.

Misol. $A_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorlar sistemasining rangini hisoblang.

Yechish. Berilgan vektor koordinatalari yordamida matritsa quramiz va martitsa rangini elementar almashtirish yordamida topamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 14 & 13 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$r(A)=3$ bo‘lgani uchun $r(A_1, A_2, A_3, A_4)=3$ bo‘ladi.

Ta’rif. Kvadrat matritsa elementlaridan tuzilgan determinant noldan farqli bo‘lsa, u holda bunday matritsa aynimagan yoki maxsusmas matritsa deyiladi. Aks holda, ya’ni agar determinant nolga teng bo‘lsa, bu matritsa aynigan yoki maxsus matritsa deyiladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ va $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matritsalarning aynigan yoki aynimaganligini aniqlang.

Yechish. Berilgan matritsalarning determinantlarini hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 60 = -50,$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0,$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Demak, A va E matritsalar – aynimagan, B matritsa esa aynigan matritsa. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ixtiyoriy sonlar va $A_1, A_2, ..., A_n$ vektorlar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. $B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$ vektorga $A_1, A_2, ..., A_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

Ta’rif. Agar A matritsaning r tartibli minoridan katta barcha minorlari nolga teng bo‘lsa, u holda matritsaning noldan farqli r tartibli minori bazis minor deb ataladi.

Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, bazis minorning tartibi matritsa rangiga teng.

Bazis minorlar haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Matritsaning ixtiyoriy ustuni (satri) bazis minor joylashgan ustunlar (satrlar) chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. Umumiylikni buzmasdan bazis minor birinchi r ta satr va birinchi r ta ustunlar kesishmasida joylashgan, deb olamiz. $r+1$ tartibli quyidagi minorni ko‘rib chiqamiz.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & a_{sk} \end{vmatrix}$$

Bu minor bazis minorga $s-$ satr va $k-$ ustun elementlarini qo‘shishdan hosil bo‘lgan. Ta’rifga asosan $D=0$. Determinantni Laplas teoremasidan foydalangan holda oxirgi satri bo‘yicha yoysak,

$$a_{s1}D_{s1}+...+a_{sr}D_{sr}+a_{sk}D_{sk}=0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bunda D_{sj} son a_{sj} elementning algebraik to‘ldiruvchisi. Teorema shartiga ko‘ra $D_{sk}\neq 0$. Bundan:

$$a_{sk}=\alpha_1 a_{s1}+\alpha_2 a_{s2}+...+\alpha_r a_{sr},$$

bu erda $\alpha_j=\dfrac{D_{sj}}{D_{sk}}$, $j=1,2,...,r$. Bu tenglikda k ni 1 dan m gacha o‘zgartirib, ixtiyoriy $k-$ ustun α_j, $j=1,2,...,r$ koeffitsiyentlar bilan bazis minorga mos ustunlar chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodasini olamiz.

Ta’rif. A kvadrat matritsaning har bir a_{ik} elementini unga mos algebraik to‘ldiruvchisi bilan almashtirish natijasida hosil qilingan matritsa ustida transponirlash amalini bajarishdan hosil bo‘lgan $\bar{A}$ matritsa berilgan matritsaga qo‘shma matritsa deyiladi.

Masalan: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaga qo‘shma matritsa

$\bar{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{i1} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{i2} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{1j} & A_{2j} & ... & A_{ij} & ... & A_{nj} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{in} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol. Quyidagi $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa uchun qo‘shma matritsa topilsin.

Yechish. Matritsaning barcha elementlariga mos algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-20,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-15,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4.$$

Shunday qilib, berilgan A kvadrat matritsaga qo‘shma bo‘lgan $\bar{A}$ matritsa

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -20 \\ 0 & -15 & -10 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -5 & -15 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Ta’rif. Agar A kvadrat matritsa uchun $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

Ta’rifga asosan, $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E) = 1$ bo‘lganligi sababli, agar teskari matritsa mavjud bo‘lsa $\det(A) \neq 0$ ekanligini hosil qilamiz. Agar $\det(A) = 0$ bo‘lsa, teskari matritsa mavjud emas.

Odatda matritsaga teskari matritsa topishning 2 xil usulidan foydalanamiz:

1. Agar A matritsa aynimagan bo‘lsa, u holda uning uchun yagona A^{-1} matritsa mavjud bo‘ladi va u quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\bar{A},$$

bunda $\bar{A}$ matritsa A ga qo‘shma matritsa.

Misol. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$

Yechish. 1) A matritsaning determinantini topamiz:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -48 - 2 \cdot (-42) + 3 \cdot (32 - 35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

$\det A \neq 0$ demak A^{-1} mavjud.

2) A matritsa barcha elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=4\cdot 8-5\cdot 7=-3;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 0\end{vmatrix}=24;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-21;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=6;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3;$$

3) $\overline{A}=\left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$ matritsani yozamiz.

4) A^{-1} matritsani topamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\overline{A}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

Tekshiramiz: $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Teskari matritsani topishning Gauss-Jordan usulida maxsusmas matritsani shu tartibdagi birlik matritsa bilan kengaytiriladi, kengaytirilgan matritsa satrlari ustida elementar almashtirish to kengaytirilgan matritsa birinchi qismida birlik matritsa hosil bo‘lguncha olib boriladi, natijada kengaytirilgan matritsaning ikkinchi qismida berilgan matritsaga teskari bo‘lgan matritsa hosil bo‘ladi. Bu jarayonni Gauss-Jordan modifikatsiyasi (yoki formulasi) ko‘rinishida yozishimiz mumkin: $(A|E)\sim(E|A^{-1})$

Misol. Gauss-Jordan usulida berilgan matritsaga teskari matritsani toping.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Yechish. (3×6) o‘lchamli $\Gamma=(A/E)$ kengaytirilgan matritsani yozamiz. Avval matritsaning satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib uni pog‘onasimon ko‘rinishga keltiramiz $\Gamma_1=(A_1/B)$, keyin $\Gamma_2=(E/A^{-1})$ ko‘rinishga keltiramiz.

$$\Gamma=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ II-I\\ III-2\cdot I\end{array}\sim$$

$$\sim\Gamma_1=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ II+III\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ III\div2\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right)\begin{array}{l}I-II-III\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \Gamma_2$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

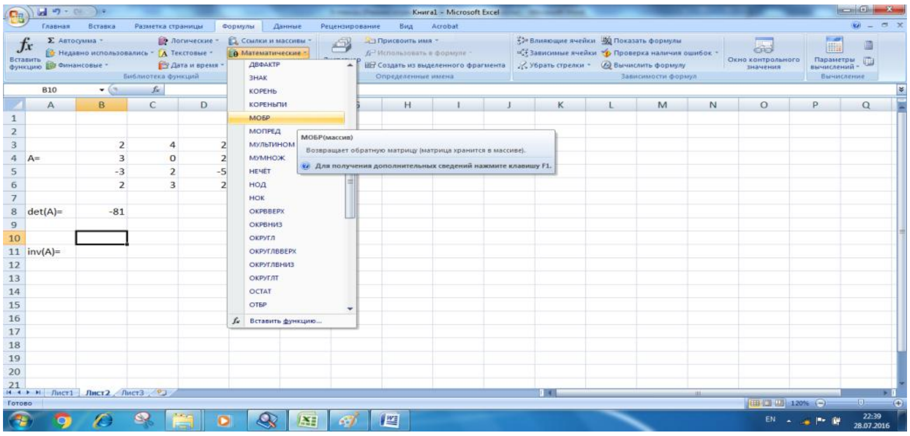
Tekshiramiz: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

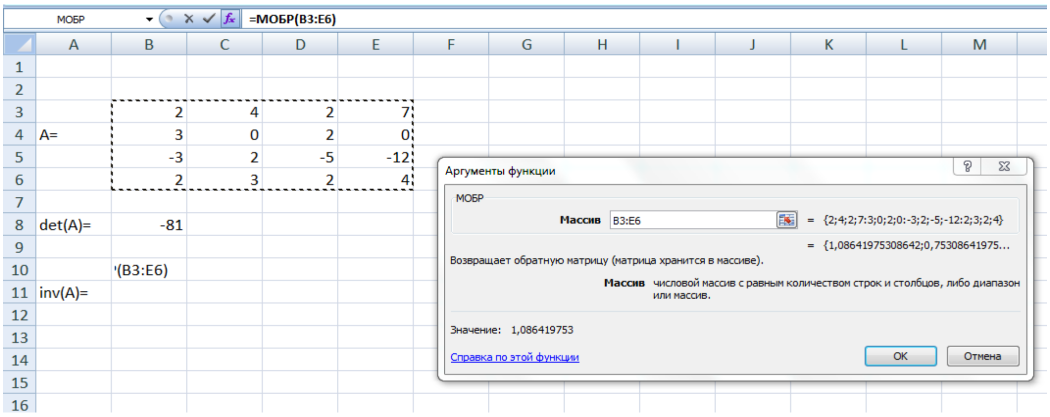
Endi teskari matritsani Excelda qurish bilan tanishib chiqamiz.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & -12 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini topamiz. Birinchi navbatda matritsaning determinantini hisoblaymiz. $\det(A) = -81 \neq 0$. Demak, teskari matritsa mavjud.

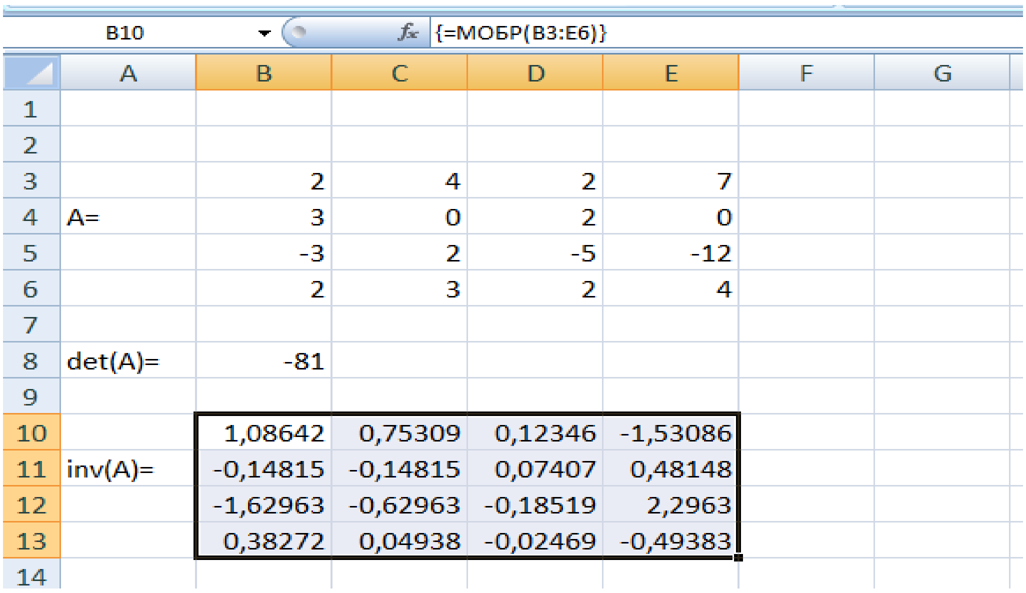
I. Bo‘sh katakni belgilaymiz. Matematik funksiyalardan 'МОБР' funksiyasini tanlaymiz.



II. Dialog oynasida A matritsa joylashgan o‘rni koordinatalarini kiritamiz.



III. Enter tugmasini bosamiz. Belgilangan katakda teskari matritsaning birinchi elementi paydo bo‘ladi. Boshqa elementlarni hosil qilish uchun shu katakdan boshlab 4 ga 4 jadvalni belgilaymiz va $F2$ tugmasini bosamiz. Keyin Ctrl+Shift+Enter tugmalari birgalikda bosiladi. Shu bilan teskari matritsani hosil qilamiz.



Matritsalarni ko‘paytirish usuli bilan tekshirib, natija to‘g’riligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3		2	4	2	7						
4	A=	3	0	2	0						
5		-3	2	-5	-12						
6		2	3	2	4			1	0	0	0
7								0	1	0	0
8	det(A)=	-81					A*inv(A)=	0	0	1	0
9								0	0	0	1
10		1,08642	0,75309	0,12346	-1,53086						
11	inv(A)=	-0,14815	-0,14815	0,07407	0,48148						
12		-1,62963	-0,62963	-0,18519	2,2963						
13		0,38272	0,04938	-0,02469	-0,49383						
14											

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Satr matritsa, ustun matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
3. Nol matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Matritsalarni qo’shish va matritsani songa ko’paytirish amallari bo’ysunadigan xossalarni sanab o’ting?
5. Matritsa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
6. O’zaro zanjirlangan matritsalar qanday ko’paytiriladi?
7. Matritsalarni ko’paytirish amali qanday xossalarga bo’ysunadi?
8. Matritsalarni ko’paytirish amali o’rin almashtirish qonuniga bo’ysunadimi?
9. n-tartibli kvadratik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
10. Kvadrat matritsaning qanday xususiy ko’rinishlarini bilasiz?
11. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
12. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash Sarrus qoidasi nimadan iborat?
13. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash uchburchak sxemasini yozing.
14. Transpozitsiyalash deganda nimani tushunasiz?
15. Juft yoki toq o’rin almashtirish tizimi deb, qanday o’rin almashtirishga aytiladi?
16. n- tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
17. n- tartibli determinant ixtiyoriy elementi minori deb nimaga aytiladi?
18. Algebraik to’ldiruvchi yoki ad’yunkt deb nimaga aytiladi?
19. Determinantni transponirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishlar bajarganda kattaligi o’zgarmaydi?
20. n-tartibli kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi deb nimaga aytiladi?

21. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?
22. Matritsa rangini hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
23. Matritsa ustida qanday amallarni bajarganda uning rangi o’zgarmaydi?
24. Xosmas matritsa deb qanday kvadratik matritsaga aytiladi?
25. Xos matritsa deb qanday kvadratik matritsaga aytiladi?
26. Teng tartibli qanday kvadratik matritsalarni ko’paytirganda ko’paytma xosmas matritsadan iborat bo’ladi?
27. Xosmas matritsaning teskari matritsasi deb qanday matritsaga aytiladi?
28. Nima uchun xos matritsaning teskarisi mavjud emas?
29. Kvadratik matritsaning teskari matritsasini qurishning qanday usullarini bilasiz?
30. Teskari matritsaning qanday xossalarini bilasiz?

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

1. Mike Rosser. Basic mathematics for economists. London and New York 1993, 2003y.

2. M.Harrison and P.Waldron Mathematics for economics and finance. London and New York 2011y.

3. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.
4. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA, 2010.
5. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, NY 2005
6. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O’quv qo’llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017, 386 bet.
7. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017, 746 стр.

2-mavzu. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

Reja

2.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar. Kroneker-Kapelli teoremasi.
2.2. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo’llanilishiga misollar.
2.3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli va Gauss - Jordan usullari.
2.4. Bazis yechim tushunchasi.
2.5. Gauss va Gauss – Jordan usullarining iqtisodiy masalalarni yechishga qo’llanilishi.

Tayanch so‘z va iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS), tenglamalar sistemasi yechishning qo’shish usuli, o’rniga qo’yish usuli, grafik usuli, yagona yechim, birgalikda bo’lgan sistema, aniqmas sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo’lmagan sistema, tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo’llanilishi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss – Jordan modifikatsiyasi, chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimlari.

Ma’lumki, bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

sistemaga n noma’lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (yoki soddalik uchun chiziqli tenglamalar sistemasi) deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ sonlar (1) sistemaning koeffitsiyentlari, $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ lar noma’lumlar, $b_1, b_2, ..., b_m$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Noma’lumlar vektorini $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ ustun vektor, ozod hadlarni $B = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ ustun vektor shaklida ifodalaymiz. U holda tenglamalar sistemasi quyidagi matritsa shaklida yozilishi mumkin:

$$AX = B.$$

Ta’rif. Agar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ larning o‘rniga qo‘yilganda (1) sistemadagi tenglamalarni to‘g‘ri tenglikka aylantirsa, bu sonlarga (1) sistemaning yechimlari tizimi, deb aytiladi va $X = \left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n\right)^T$ kabi belgilanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo‘lsa, u holda bunday sistema birgalikda deyiladi.

Misol. $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ sistema birgalikda chunki sistema $x = 3, y = 1$ yechimga ega.

Bitta ham yechimga ega bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lmagan sistema deyiladi.

Misol. $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$ sistema yechimga ega bo‘lmaganligi sababli birgalikda emas.

Birgalikda bo‘lgan sistema yagona yechimga ega bo‘lsa, aniq sistema va cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa aniqmas sistema deyiladi.

Misol. $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=2, \\ 3x-3y=3 \end{cases}$ sistema birgalikda, ammo aniqmas, chunki bu sistema $x=\alpha$, $y=-1+\alpha$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p yechimga ega, bunda α-ixtiyoriy haqiqiy son.

Birgalikda bo‘lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo‘lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

Misol. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1,1)$.

$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ (b) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1,1)$.

(a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini noldan farqli songa ko‘paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo‘shish bilan hosil bo‘lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo‘ladi.

Misol. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemadagi 1-tenglamani (-3) ga ko‘paytirib 2-tenglamaga qo‘shib quyidagini hosil qilamiz. $\begin{cases} x+3y=5 \\ -10y=-10 \end{cases}$ (b) natijada (a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega yoki ega emasligini quyidagi teorema yordamida aniqlash mumkin.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning A asosiy matritsasi va kengaytirilgan $(A|B)$ matritsalarining ranglari teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilamiz (1) sistema birgalikda bo‘lsin. U holda uning biror yechimi mavjud va $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, ..., x_n=\xi_n$ dan iborat bo‘lsin.

Bu yechimni (2.1) chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar o‘rniga qo‘ysak:

$$a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\cdots+a_{in}\xi_n=b_i, \quad i=1,2,...,m \tag{2}$$

ega bo‘lamiz.

Bu tengliklar majmuasi quyidagi tenglikka ekvivalent:

$$\xi_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+\xi_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+\xi_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},\quad i=1,2,...,m \qquad (3)$$

Bundan (1) sistemaning kengaytirilgan matritsasi oxirgi ustuni asosiy matritsa ustunlari kombinatsiyasidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Ma'lumki matritsaning rangi ustunlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ustunni tashlab yuborilganda o'zgarmaydi. Kengaytirilgan matritsadan ozod hadlar ustunini olib tashlasak sistemaning asosiy matritsasiga ega bo'lamiz. Demak, asosiy va kengaytirilgan matritsalarning ranglari teng. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Yetarliligi. Aytaylik asosiy va kengaytirilgan matritsalarning ranglari teng,

$$r(A)=r(A/B)$$

A (asosiy) matritsaning r ta bazis ustunlarini ajratamiz, bular (A/B) (kengaytirilgan) matritsaning ham bazis ustunlari bo'ladi. Faraz qilamiz birinchi r ta ustun bazis bo'lsin.

Bazis minor haqidagi teoremaga asosan A matritsaning oxirgi ustuni bazis ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida tasvirlanishi mumkin. Bu esa:

$$\xi_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+\xi_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+\xi_r\begin{pmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{mr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi $\xi_1,\xi_2,...,\xi_r$ lar mavjudligini bildiradi. Oxirgi munosabat quyidagi m ta tenglamalarga ekvivalent:

$$a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\cdots+a_{ir}\xi_r=b_i,\quad i=1,2,...,m$$

Agar (1) tenglamalar sistemasiga

$$x_1=\xi_1, x_2=\xi_2,...,x_r=\xi_r, x_{r+1}=0,...,x_n=0, \qquad (4)$$

qo'ysak, u holda tenglamalar sistemasi (2) ga aylanadi. Bundan noma'lumlarning (4) qiymati (1) sistemadagi barcha tenglamalarni qanoatlantiradi, ya'ni sistema yechimga ega bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Kroneker - Kapelli teoremasiga ko'ra birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasining asosiy A matritsasi rangi bilan uning kengaytirilgan (A/B) matritsasining ranglari teng. $r=r(A)=r(A/B)$ qiymatni berilgan sistemaning rangi deb ataymiz. A matritsaning biror bazis minorini belgilab olamiz. Bazis satrlarga mos bo'lgan tenglamalarni berilgan sistemaning bazis tenglamalari deb ataymiz. Bazis tenglamalar bazis sistemani tashkil etadi. Bazis ustunlarda qatnashgan noma'lumlarni bazis o'zgaruvchilar, qolganlarini ozod o'zgaruvchilar, deb ataymiz.

Oldingi mavzularda berilgan bazis minor haqidagi teoremadan quyidagi tasdiq o‘rinliligi kelib chiqadi.

Teorema. Chiziqli tenglamalar sistemasi o‘zining bazis tenglamalar sistemasiga ekvivalent.

Soddalik uchun (1) sistemada birinchi r ta tenglama bazis tenglama bo‘lsin. Yuqorida keltirilgan teoremaga asosan:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1,2,...,r \qquad (5)$$

bazis tenglamalar sistemasi berilgan (1) sistemaga ekvivalent. Shuning uchun (1) tenglamalar sistemasi o‘rniga uning rangiga teng bo‘lgan (5) sistemani tadqiq etish yetarli.

O‘z-o‘zidan ko‘rinadiki matritsaning rangi ustunlar sonidan katta emas, ya’ni $r \le n$. Boshqacha aytganda birgalikdagi sistemaning rangi noma’lumlar sonidan oshmaydi.

Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) $r = n$;

$r = n$, ya’ni bazis sistemada tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lsin. Bazis sistemani quyidagicha ifodalaymiz $A_b X = B_b$. Bunda A_b bazis minorga mos matritsa. $\det(A_b) \ne 0$ bo‘lganligi sababli, A_b^{-1} mavjud va

$$X = EX = A_b^{-1}A_b X = A_b^{-1}(A_b X) = A_b^{-1}B$$

tenglik yagona yechimni ifodalaydi.

2) $r < n$ bo‘lsin. Tenglamalarda $x_1, x_2, ..., x_r$ bazis noma’lumlar qatnashmagan barcha hadlarni uning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz. U holda (5) sistema:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ir}x_r = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \cdots - a_{in}x_n . \qquad (5)$$

ko‘rinishni oladi.

Agar erki $x_r, x_{r+1}, ..., x_n$ noma’lumlarga biror $\xi_{r+1}, ..., \xi_n$ sonli qiymatlarni bersak, u holda $x_1, ..., x_r$ o‘zgaruvchilarga nisbatan tenglamalar sistemasini olamiz va bu sistemada noma’lumlar soni asosiy matritsa rangiga teng bo‘lganligi sababli u yagona yechimga ega. Erkli noma’lumlar qiymati ixtiyoriy tanlanganligi sistemaning umumiy yechimlari soni cheksiz ko‘p.

Fan va texnikadaning ko‘p sohalarida bo‘lganidek, iqtisodiyotning ham ko‘p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

Misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari	Xom ashyo zahirasi

	A	B	C	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Berilgan xom ashyo zahirasi to‘la sarflansa, mahsulot turlari bo‘yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlashning matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. Bir birlik A turdagi mahsulotga, 1-xil xom ashyo sarfi 5 birlik bo‘lganligi uchun $5x_1$ A turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil- xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday B va C turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $7x_3$ bo‘lib, uning uchun quyidagi tenglama o‘rinli bo‘ladi:

$5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Yuqoridagiga o‘xshash 2-, 3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$
$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu masalaning matematik modeli quyidagi uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070. \end{cases}$$

Ikki bozor muvozanati masalasi. Ko‘p bozorli muvozanat modelida tenglamalar sistemasi har bir bozordagi talab, taklifning muvozanatini ifodalaydi. Bunda talab va taklif har bir bozorda, boshqa bozordagi narxlarga bog‘liq. Masalan, kofega bo‘lgan talab, faqat kofening narxiga bog‘liq emas shuningdek o‘rin bosuvchi tovar bo‘lgan choyning ham narxiga bog‘liq. Mashinaga talab uning narxiga bog‘liq va shuningdek, to‘ldiruvchi tovar bo‘lgan uning yoqilg‘isiga ham bog‘liq. Korxonalarning taklifi turli ko‘rinishdagi tovarlar narxiga bog‘liq. Masalan, biror firma ishlab chiqargan mahsulot, boshqasi uchun xom ashyo material bo‘lishi mumkin.

Ikki tovar bog‘liqligi modeli masalasi.

$$\left.\begin{aligned} q_1^s &= \alpha_1 + \beta_{11} p_1 + \beta_{12} p_2 \\ q_2^s &= \alpha_2 + \beta_{21} p_1 + \beta_{22} p_2 \end{aligned}\right\} \text{taklif}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1^d &= a_1 + b_{11} p_1 + b_{12} p_2 \\ q_2^d &= a_2 + b_{21} p_1 + b_{22} p_2 \end{aligned}\right\} \text{talab}$$

Natijada masalan, $\beta_{12} < 0$ ikkinchi firmadagi materiallar narxi o‘sishi, birinchi firmani material sarfini kamaytiradi, natijada esa birinchi firma ishlab chiqarishni kamaytiradi. Har bir bozordagi talab va taklifning tengligining o‘rnatilishi muvozanat narxlar bo‘lgan p_1 va p_2 larni aniqlash uchun ikki tenglamalar sistemasini beradi. $b_{ij} \cdot s$ va $\beta_{ij} \cdot s$ lar nolga teng ham bo‘lishi mumkin.

Bu tenglamalar modelning asosini tashkil etadi va strukturali tenglik, deb ataladi.

$$(b_{11} - \beta_{11}) \cdot p_1 + (b_{12} - \beta_{12}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$
$$(b_{21} - \beta_{21}) \cdot p_1 + (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$

Ikkinchi tenglamadan p_1 ni topsak:

$$p_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) - (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2}{(b_{21} - \beta_{21})}$$

Endi buni birinchi tenglikka qo‘yamiz

$$p_2 = \frac{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (\alpha_2 - a_2) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (\alpha_1 - a_1)}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 ni topsak:

$$p_2 = \frac{(b_{22} - \beta_{22}) \cdot (\alpha_1 - a_1) - (b_{12} - \beta_{12}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 va p_2 larni bunday ta’riflash kamaytirilgan forma deb ataladi. Chunki ular faqat modelning ko‘rsatkichlariga bo‘g‘liq. $a_i, \alpha_i, b_{ij}, \beta_{ij}$ $i, j = 1,2$ larning alohida parametrlari uchun biz p_i ning qiymatlarini topa olamiz. Keyingi misollarda bu qiymatni qanday topish ko‘rsatilgan.

To‘ldiruvchi tovarlar uchun ikki bozor muvozanati. Faraz qilaylik iste’molchilar bozorida o‘rin bosadigan tovarlarga talab, taklif tengligi quyidagicha:

$$q_1^s = -1 + p_1, \ \ q_1^d = 20 - 2p_1 - p_2 \qquad \text{1-tovar}$$
$$q_2^s = p_2, \ \ q_2^d = 40 - 2p_2 - p_1 \qquad \text{2-tovar}$$

Bu yerda q_i^s va q_i^d talab va taklif miqdori. p_i tovar narxlari bu tovarlarning o‘rinbosar ekanligidan agar birinchi tovarga talab kamaysa, ikkinchi tovar narxi ko‘tariladi. Endi muvozanat narxni toping (ikki tovar uchun).

Yechish. $q_i^s = q_i^d$ tengligidan ikkita tenglik kelib chiqadi

$$3p_1 + p_2 = 21$$
$$p_1 + 3p_2 = 40$$

Ikkinchi tenglikdan $p_1 = 40 - 3p_2$ topib, birinchisiga qo‘ysak:

$$3 \cdot (40 - 3p_2) + p_2 = 21 \Rightarrow 8p_2 = 99 \Rightarrow p_2 = 12{,}375$$

va $p_1 = 2{,}875$ ekanligi keladi. Natijada bu narx bozordagi muvozanat narxni beradi.

n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda (dastlab chapdan o'ngga, so'ngra o'ngdan chapga qarab) amalga oshiriladi.

1 – bosqich. (1) sistemani uchburchak ko'rinishga keltirishdan iborat. Buning uchun, $a_{11} \neq 0$, deb (agar $a_{11} = 0$ bo'lsa, 1- tenglamani $a_{i1} \neq 0$ bo'lgan i-tenglama bilan o'rin almashtiriladi) birinchi tenglamaning chap va o'ng tomoni a_{11} ga bo'linadi. So'ngra, 1 tenglama $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ga ko'paytirilib, i-tenglamaga qo'shiladi. Bunda, sistemaning 2-tenglamasidan boshlab x_1 noma'lum yo'qotiladi. Bu jarayonni $n-1$ marotaba takrorlab quyidagi uchburchaksimon sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

2–bosqich. Oxirgi sistemani yechishdan iborat. Bunda, dastlab sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n topilib, undan oldingi tenglamaga qo'yiladi va undan x_{n-1} topiladi. Shu jarayon davom ettirilib, nihoyat 1-tenglamadan x_1 topiladi.

Sistema Gauss usuli bilan yechilganda uchburchaksimon shaklga kelsa u yagona yechimga ega bo'ladi. Agar sistema pog'onasimon shaklga kelsa u cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi.

Tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli, deb ham ataladi. Bu jarayonni kattaroq teglamalar sistemasiga qo'llash mumkin, chunki bu juda samarali. Quyidagi misolni ko'rib chiqamiz:

Misol. Tenglamalar sistemasining barcha mumkin bo'lgan yechimlarini toping.

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$$

Yechish. Dastlab ikkinchi va uchinchi tenglamadagi x_1 noma'lumni yo'q qilinadi va keyin x_2 noma'lumni uchinchi tenglamadan yo'qotamiz. Keyin faqat x_3 noma'lum qoladi. Lekin biz dastlabki 2 ta tenglamaning o'rnini almashtirishdan boshlaymiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

2 -tenglamada x_1 yo‘q. Keyingi qadamda 1-tenglamani ishlatib 3-tenglamadagi x_1 noma’lumni yo‘qotamiz. Bu jarayon 1-tenglamani 3 ga ko‘paytirib 3-tenglamaga qo‘shish orqali bajariladi.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Keyingi bosqichda 2-tenglamani $\frac{1}{2}$ ga ko‘paytirib, x_2 ning koeffitsiyentini 1 ga aylantiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasidagi 2-tenglamani -5 ga ko‘paytirib 3-tenglamaga qo‘shamiz. x_2 ni yo‘qotamiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \\ \frac{27}{2}x_3 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

So‘ng, oxirgi tenglamani $\frac{2}{27}$ ga ko‘paytirib $x_3 = 1$ qiymatni topamiz. Bu qiymatni ikkinchi tenglamaga qo‘yib, $x_2 = -3$ qiymatni hosil qilamiz. $x_3 = 1$ va $x_2 = -3$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo‘yib $x_1 = 2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(2;-3;1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib yechimni topamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 9x_2 = 9, \\ 14x_2 - 7x_3 = 21. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_3 - 2x_2 = -3, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$x_2 = 1$ qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, $x_3 = -1$ qiymatni hosil qilamiz. $x_2 = 1$ va $x_3 = -1$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo'yib $x_1 = -2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(-2;1;-1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenlamalar sonidan ko'p bo'lsa ham, ya'ni sistema birgalikda bo'lib aniq bo'lmasa ham uning yechimini Gauss usulida topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

Misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 7x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 44, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Yechish. Birinchi qadamda sistemadagi birinchi tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, qolganlaridan ketma-ket x_1 noma'lumni yo'qotamiz, ikkinchi qadamda ikkinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, uchinchi qadamda uchinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_3 noma'lumni yo'qotamiz. Soddalik uchun tenglamalar sistemasi o'rniga kengaytirilgan matritsa ustida ish olib boramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 7 & 2 & 8 & -6 & 44 \\ 5 & 2 & 5 & -6 & 30 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -6 & 1 & 16 \\ 0 & 7 & -5 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22 \end{array}\right)$$

Hosil bo'lgan sistemada ikkita bir hil tenglamadan bittasini qoldirib, ikkinchisini tashlab yuboramiz. Shu yerda chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning chapdan o'ngga qarab bosqichi tugadi. Tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik. Endi x_4 erkli o'zgaruvchini o'ng tomonga o'tkazamiz. So'ngra o'ngdan chapga qarab harakat yordamida sistemaning barcha yechimlari topiladi.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_3 + 16x_4 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_4 - 34/3 \\ x_2 = -(11x_4 + 2)/3 \\ x_3 = -(16x_4 - 22)/3 \end{cases} \Rightarrow$$

Javob: $\left(8x_4 - \frac{34}{3}; -\frac{11x_4 + 2}{3}; -\frac{16x_4 - 22}{3}; x_4\right),\ x_4 \in R.$

Mashqni bajaring. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5, \\ -x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

Tenglamalar sistemasini yechishda Gauss – Jordan usulining (Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi) mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko'rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A|B)$ matritsasi quriladi. Yuqorida keltirilgan sistemaning teng kuchliligini saqlovchi elementar almashtirishlar yordamida, kengaytirilgan matritsaning chap qismida birlik matritsa hosil qilinadi. Bunda birlik matritsadan o'ngda yechimlar ustuni hosil bo'ladi. Gauss - Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B) \sim (E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishning Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurishning Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o‘ng ustunda bir yo‘la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko‘paytmasi–yechimlar ustuni quriladi.

Misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan kengaytirilgan matritsa tuzamiz. Tenglamalar ustida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matritsani quyidagicha birlik matritsaga keltirib javobni topamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 27 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Misol. Tenglamalar sistemasini Gauss – Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Yechish. Berilgan sistemada kengaytirilgan matritsani ajratib olamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

va unga Gauss – Jordan usulini tatbiq etamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/5 & 3/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & -14/5 & 19/5 & 4/5 & 18/5 \\ 0 & 14/5 & 1/5 & 1/5 & -13/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8/7 & 5/7 & 5/7 \\ 0 & 1 & -19/14 & -2/7 & -9/7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/56 & -53/56 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Sistema trapetsiyasimon ko'rinishiga keldi:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{7}x_4 = \frac{3}{7} \\ x_2 + \frac{3}{56}x_4 = -\frac{53}{56} \\ x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bu yerda x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchilarni bazis sifatida qabul qilamiz, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Bu determinant oxirgi sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan asosiy matritsaning ham bazis minori bo'ladi. Erkli o'zgaruvchi bo'lib x_4 xizmat qiladi.

Oxirgi sistemadan quyidagi yechimga

$$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4,$$
$$x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4,$$
$$x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4.$$

ega bo'lamiz. Shunday qilib, berilgan sistemaning umumiy X yechimini

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4 \\ -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Agar $x_4 = 2$, deb olsak, u holda berilgan sistemaning

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{59}{56} \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishdagi xususiy yechimini topamiz.

Agar $x_4 = 0$ ni olsak berilgan sistemaning quyidagi bazis yechimiga ega bo‘lamiz:

$$X_b = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{53}{56} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iqtisodiy masalalarning chiziqli tenglamalar sistemasi yordamida ifodalanadigan modellarida odatda noma’lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo‘ladi. Bu holat bir tomondan erkli o‘zgaruvchilarni tanlash hisobiga bizga qo‘shimcha erkinlik beradi. Biroq sistema yechimlari cheksiz ko‘p bo‘lgani sabab mumkin bo‘lgan barcha holatlarni ko‘rish mumkin bo‘lmay qoladi va buning oqibatida iqtisodiy jihatdan optimal yechimni topishning imkoniyati bo‘lmaydi.

Bunday holatlarda odatda bazis yechim tushunchasidan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Ta'rif. Faqat bazis o'zgaruvchilari noldan farqli bo'lishi mumkin bo'lgan yechim tenglamalar sistemasining bazis yechimi deyiladi.

Bazis yechimda erkli o'zgaruvchilarning qiymatlari nolga teng, deb olinadi. Tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p bo'lsada, bazis yechimlar soni chekli bo'ladi. Bazis yechimlar soni bazis minorlar soniga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik sistemaning rangi r ga, noma'lumlar soni n ga teng bo'lsin. $n > r$ bo'lganda bazis minorlar soni (bazis yechimlar soni) ko'pi bilan $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ga teng.

Tasdiq. Agar $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar $AX = B$ tenglamalar sistemasining bazis yechimlari bo'lsa, $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sonlar uchun $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_k X_k$ chiziqli kombinatsiya ham $AX = B$ tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_k X_k) = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 + ... + \alpha_k AX_k =$$
$$= \alpha_1 B + \alpha_2 B + ... + \alpha_k B = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)B = B.$$

Umuman olganda, sistemaning ixtiyoriy yechimini bazis yechimlarning koeffitsiyentlari yig'indisi birga teng bo'lgan chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$$

sistemada:

a) noma'lumlarni bazis va erkin o'zgaruvchilarga ajratish usuli sonini aniqlang:

b) bazis yechimlarini toping.

Yechish. a) mazkur sistemada ikkita tenglama va beshta noma'lum qatnashmoqda $(m = 2, \quad n = 5)$. Ko'rinib turibdiki, $r = 2$. Demak, noma'lumlarning bazis guruhlari ikkita noma'lumdan iborat. Bunda:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{3!4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!} = 10\,.$$

Bunda guruhlar:

$x_1, x_2;\quad x_1, x_3;\quad x_1, x_4;\quad x_1, x_5;\quad x_2, x_3;\quad x_2, x_4;\quad x_2, x_5;\quad x_3, x_4;\quad x_3, x_5;\quad x_4, x_5.$ Bu juftliklarning qaysi birida no‘malumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli bo‘lsa, o‘sha juftlik noma’lumlari bazis o‘zgaruvchi bo‘la oladi. Shuning uchun quyidagi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki 2-, 4-,6-,9- juftliklar bazis o‘zgaruvchilar bo‘la olmaydi. Chunki bu juftliklarga mos bazis minorlar nolga teng. Demak, sistemani bazis va erkin o‘zgaruvchilarga oltita usul bilan ajratish mumkin:

1) x_1 va x_2 - bazis, x_3, x_4, x_5 - erkli;

2) x_1 va x_4 - bazis, x_2, x_3, x_5 - erkli;

3) x_2 va x_3 - bazis, x_1, x_4, x_5 - erkli;

4) x_2 va x_5 - bazis, x_1, x_3, x_4 - erkli;

5) x_3 va x_4 - bazis, x_1, x_2, x_5 - erkli;

6) x_4 va x_5 - bazis, x_1, x_2, x_3 - erkli.

b) berilgan sistemaning bazis yechimlarini topamiz. Yuqoridagi a) punktda sistema oltita bazis yechimga ega ekanligini ko‘rgan edik. Birinchi bazis yechimni topish uchun $\boldsymbol{x}_1$ va $\boldsymbol{x}_2$ bazis o‘zgaruvchilarni o‘zgarishsiz qoldirib, x_3, x_4, x_5 erkli o‘zgaruvchilarni nolga tenglaymiz. Natijada $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz va uning yechimi $x_1 = 3, \quad x_2 = 1.$

Shunday qilib, birinchi bazis yechim $X_{1b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ikkinchi bazis yechimni topamiz. $\boldsymbol{x}_1$ va $\boldsymbol{x}_4$ - bazis, u holda $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5$ erkli o‘zgaruvchilarni nolga tenglab

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz va $x_1 = 3, \quad x_4 = -\frac{1}{2}$ yechimi topamiz.

Shunday qilib, ikkinchi bazis yechim $X_{2b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Xuddi shu usul bilan qolgan bazis yechimlarni ham topamiz:

$$X_{3b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_{4b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X_{5b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_{6b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aniq r ta noldan farqli noma’lumdan tashkil topgan bazis yechimga xosmas bazis yechim deyiladi, bunda r - sistemaning rangi.

Yuqorida qaralgan misoldagi barcha oltita yechim ham xosmas bazis yechim bo‘ladi.

Ta’rifga ko‘ra bazis yechimda erkli o‘zgaruvchilar nolga teng, bazis yechimlar esa odatda noldan farqli. Lekin, bazis yechimning bazis o‘zgaruvchilari ham nolga teng bo‘lib qolishi mumkin. Bunday bazis yechimlar xos (maxsus) bazis yechimlar deb ataladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining bazis yechimlari topilsin.

Yechish. Sistema ikkita tenglama va uchta noma'lumdan iborat $(m=2, \quad n=3)$ va $r=2$. Demak, bazis o'zgaruvchilar guruhi ikkita noma'lumdan tashkil topgan. Bazis yechimlar soni $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ dan katta emas.

x_1 va x_2 - bazis o'zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. U holda x_3 - erkli o'zgaruvchi. Tenglamalarga $x_3 = 0$ qiymatni qo'yib,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz va uning yechimi $x_1 = 1, \quad x_2 = 0$. Topilgan birinchi bazis yechim $X_{1b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_2 = 0$.

x_1 va x_3 - ham bazis o'zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. U holda x_2 - erkli o'zgaruvchi. Tenglamalarga $x_2 = 0$ qo'yib,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz, uning yechimi $x_1 = 1, \ x_3 = 0$. Ikkinchi bazis yechim $X_{2b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_3 = 0$.

x_2 va x_3 lar bazis o‘zgaruvchilar emas, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant nolga teng: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$. Demak, uchinchi bazis yechim mavjud emas.

Misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari			Xom ashyo zahirasi (tonna)
	1	2	3	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo‘yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo‘lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil-xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2-,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo‘lib, uning uchun quyidagi tenglama o‘rinli bo‘ladi:

$5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20$. Yuqoridagiga o‘xshash 2-,3-xil xom ashyolar uchun

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16,$$

$$9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ \dfrac{6}{5}x_2 + \dfrac{34}{5}x_3 = 8, \\ -\dfrac{73}{5}x_2 - \dfrac{7}{5}x_3 = -16 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 6x_2 + 34x_3 = 40, \\ -\dfrac{1220}{3}x_3 = -\dfrac{1220}{3} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 6x_2 + 34x_3 = 16, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Misol. Korxona to‘rt xildagai xom ashyo ishlatib to‘rt turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari				Xom ashyo zahirasi (tonna)
	1	**2**	**3**	**4**	
1	1	2	1	0	8
2	0	1	3	1	15
3	4	0	1	1	11
4	1	1	0	23	23

Matematik modelini tuzamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usuli bilan yechamiz.

Yechish. 1-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib sistemaning qolgan tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 1-tenglamani ketma-ket (-4), (-1) ga ko'paytirib mos ravishda 3, 4-tenglamalarga hadma-had qo'shish orqali ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Endi 2-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, boshqa tenglamalardan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 2 tenglamani (-2), (8), (1) larga ketma-ket ko'paytirib, mos ravishda 1, 3, 4 – tenglamalarga hadma-had qo'shamiz va ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Endigi qadamda 3-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan x_3 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 3-tenglamani ketma-ket $\left(-\frac{5}{21}\right)$, $\left(-\frac{3}{21}\right)$, $\left(-\frac{2}{21}\right)$ larga ko'paytirib mos ravishda 1, 2, 4 – tenglamalarga hadma-had qo'shsak, ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21}x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21}x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi qadamda 4-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan, x_4 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 4 - tenglamani ketma-ket $\left(-\frac{21}{3}\right)$, $\left(-\frac{21}{6}\right)$, (-9) larga ko'paytirib, mos ravishda 1, 2, 3 - tenglamalarga hadma-had qo'shamiz natijada, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ yechimni olamiz.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

31. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
32. Chiziqli tenglamalar sistemaning yechimi deb nimaga aytiladi?
33. Chiziqli tenglamalar sistemaning matritsaviy shakli.
34. Qanday sistemalarga birgalikda, aniq, aniqmas va birgalikda bo'lmagan sistemalar deyiladi?
35. Birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasi nima bilan xarakterlanadi va erkli noma'lumlar deb nimaga aytiladi?
36. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi deb nimaga aytiladi?
37. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudlik va yagonalik yetarli shartlari nimalardan iborat?
38. Kroneker-Kapelli teoremasi.
39. Ikki bozor muvozanati masalasi.
40. To'ldiruvchi tovarlar uchun ikki bozor muvozanati masalasi.
41. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli?
42. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulining qanday modifikatsiyalarini bilasiz?
43. Chiziqli tenglamalar sistemasi Gaussning klassik usulida qanday yechiladi?
44. Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?
45. Chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini topish o'rniga uning umumiy yechimini qurish yetarlimi?
46. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyatini so'zlab bering va sxemasini yozing?
47. Bazis yechim tushunchasi.
48. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy masalalarni yechishga qo'llanilishi.

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

8. Mike Rosser. Basic mathematics for economists. London and New York 1993, 2003y.

9. M.Harrison and P.Waldron Mathematics for economics and finance. London and New York 2011y.

10. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.

11. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA, 2010.

12. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, NY 2005

13. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O’quv qo’llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017, 386 bet.

14. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017, 746 стр.

3-mavzu. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Fundamental yechimlar sistemasi

Reja

3.1. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimlari xossalari.

3.2. Vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligi tushunchalari.

3.3. Fundamental yechimlar sistemasi.

Tayanch so‘z va iboralar: bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi, fundamental yechimlar sistemasi, aniqlik shartlari, bir jinsli bo’lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi.

n ta noma’lumli m ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini vektor shakldagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$AX = \Theta$$

Bu yerda $\Theta=(0,0,...,0)^T$ -nol vektor, A - $m\times n$ o‘lchovli matritsa, $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ - noma’lumlar vektori.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki $X=\Theta$ har doim sistemaning yechimi bo‘ladi. Bir jinsli sistema uchun $rang(A)=n$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, sistema aniq bo‘lib, yagona nol yechimga ega.

Agarda bir jinsli sistema uchun $rang(A)<n$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega bo‘ladi. Buni quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz.

1-misol. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3-x_4=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4=0,\\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

Yechish. Bu sistemadan

$$\begin{cases} \quad\;\; 2x_2- \qquad 2x_4=0,\\ \quad\;\; 7x_2+5x_3-11x_4=0,\\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Agar ozod had sifatida x_4 noma’lumni olib, $x_4=\alpha$, deb qarasak. U holda

$$x_1=\frac{3}{5}\alpha,\;\; x_2=\alpha,\;\; x_3=\frac{4}{5}\alpha,\;\; x_4=\alpha$$

ko‘rinishdagi yechimlarni hosil qilamiz.

Ushbu holda har bir nolmas yechim n o‘lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $X_0=(b_1,b_2,...,b_n)$ vektor $AX=\Theta$ sistemaning yechimi bo‘lsa, u holda k ixtiyoriy son bo‘lganda ham $kX_0=(kb_1,kb_2,...,kb_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo‘ladi.
2. Agar $X_0=(b_1,b_2,...,b_n)$ va $X_1=(c_1,c_2,...,c_n)$ vektorlar $AX=\Theta$ sistemaning yechimlari bo‘lsa, u holda $X_0+X_1=(b_1+c_1,b_2+c_2,...,b_n+c_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo‘ladi.

Shuning uchun bir jinsli sistema yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham uning yechimi bo‘la oladi.

Bir jinsli bo‘lmagan sistema yechimlari uchun yuqoridagi da’vo o‘rinli emas.

$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$, ..., $A_k=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ n o‘lchovli vektorlar sistemasini ko‘rib chiqamiz.

1-ta’rif. Agar $x_1A_1+x_2A_2+...+x_kA_k=\Theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida bittasi noldan farqli $x_1,x_2,...,x_k$ sonlar mavjud bo‘lsa, u holda $A_1,A_2,...,A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi deb ataladi.

Aks holda, yani faqat $x_1=x_2=...=x_k=0$ bo‘lgandagina $x_1A_1+x_2A_2+...+x_kA_k=\Theta$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $A_1,A_2,...,A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli vektorlar sistemasi deb ataladi.

Izoh. $x_1A_1+x_2A_2+...+x_kA_k=\Theta$ vektor bir jinsli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Masalan, $A_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorlar sistemasini qaraymiz.

$$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3=\Theta$$

vektordan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlarini Gauss usulida topamiz.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ \quad -x_2+4x_3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-7x_3, \\ x_2=4x_3, \\ x_3\in R. \end{cases}$$

Ko‘rinib turibdiki, tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega. $x_3=1$, deb olsak, $x_1=-7$, $x_2=4$ qiymatlarni topamiz. Ya’ni,

$$-7A_1+4A_2+A_3=\Theta.$$

Demak, ta’rifga asosan, qaralayotgan vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq.

Yuqorida aytib o‘tilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining xossalari va Kroneker-Kapelli teoremasiga asosan quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

Tasdiq. Agar $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasining rangi $r(A_1, ..., A_k)$ vektorlar soni k dan kichik bo‘lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Agar $r = k$ bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo‘ladi.

Xususan, bu tasdiqdan, bir xil o‘lchovli vektorlar sistemasidagi vektorlar soni bu vektorlarning o‘lchovidan, ya’ni rangidan katta bo‘lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bo‘gliq bo‘lishi kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasining rangi, ta’rifga asosan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

matritsa rangiga teng. Shartga asosan $k > n$, $r(A) \le \min(n, k) = n < k$. U holda $AX = \Theta$ tenglamada noma’lumlar soni tenglamalar sistemasi rangidan katta. Demak, sistema trivial bo‘lmagan (noldan farqli) yechimga ega, ya’ni, vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq.

2-ta’rif. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday maksimal sondagi chiziqli erkli sistemasi bu tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

Teorema. $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining har qanday yechimi fundamental yechimlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar sistemasi $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi bo‘lsin. X_0 vektor esa tenglamalar sistemasining boshqa ixtiyoriy yechimi bo‘lsin. U holda, ta’rifga asosan, $X_0, X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq. Ya’ni shunday kamida bittasi noldan farqli $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$ sonlar mavjudki,

$$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k = \Theta.$$

Agar bu tenglikda $\alpha_0 = 0$ bo‘lsa, $\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k = 0$, ya’ni, $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar chiziqli bog‘liq. Bu esa teorema shartiga zid. Demak, $\alpha_0 \neq 0$. Shu sababli

$$X_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} X_1 - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} X_k .$$

Bu teoremadan muhim bo‘lgan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Tasdiq. Agar $F_1, F_2, ..., F_k$ n o‘lchovli vektorlar sistemasi $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsa, bu bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$X = c_1 F_1 + ... + c_k F_k$$

shaklda ifodalanadi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Teorema. Bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining rangi r ga teng bo‘lib, sistema noma’lumlari soni n dan kichik bo‘lsin. U holda tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi $n-r$ ta nolmas vektorlardan iborat bo‘ladi.

Teoremadan ko‘rinib turibdiki, fundamental yechimlar sistemasidagi vektorlar soni bu sistemaga mos erkli o‘zgaruvchilar soniga teng ekan.

Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasini quyidagicha qurishimiz mumkin:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi topiladi;
2. $n-r$ ta erkli o‘zgaruvchilarga qiymat beramiz. Buning uchun $n-r$ o‘lchovli $n-r$ ta vektorlardan iborat chiziqli erkli vektorlar sistemasi tanlanadi. Bunda masalan, har bir vektori $n-r$ o‘lchovli $A_1 = (1,0,...,0)^T$, $A_2 = (0,1,...,0)^T$,..., $A_{n-r} = (0,0,...,1)^T$ sistemani tanlash mumkin;
3. Erkli noma’lumlar o‘rniga yuqorida tanlangan A_1 vektorning mos koordinatalarini qo‘yib, bazis noma’lumlar aniqlanadi va F_1 quriladi. Xuddi shunday usulda $A_2, A_3, ..., A_{n-r}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda F_2, F_3, ..., F_{n-r} yechimlar quriladi.

$F_1, F_2, ..., F_{n-r}$ vektorlar sistemasining rangi ularning qismi bo‘lgan $A_1, ..., A_{n-r}$ vektorlar rangidan kichik emas. $A_1, ..., A_{n-r}$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lgani sababli bu vektorlar sistemasi rangi maksimal, ya’ni $n-r$ ga teng. Shu sababli, $F_1, F_2, ..., F_{n-r}$ vektorlar sistemasi rangi ham maksimal, ya’ni $n-r$ ga teng, ya’ni bu yechimlar sistemasi chiziqli erkli.

2-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechish. Bu sistemada $r=2$, $n=5$. Demak, sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi $n-r=3$ ta yechimdan iborat bo‘ladi.

1. Bu yerda x_3, x_4, x_5 noma’lumlarni ozod noma’lumlar, deb hisoblab sistemani yechamiz va quyidagi umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

2. So‘ngra uchta chiziqli erkli uch o‘lchovli vektor olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bu vektorlarning har birining komponentlarini umumiy yechimga ozod noma’lumlarning qiymatlari sifatida keltirib qo‘yib, x_1, x_2 larning qiymatlarini hisoblab, berilgan tenglamalar sistemasining quyidagi fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$F_1=\left(\frac{19}{8},\quad \frac{7}{8},\quad 1,\quad 0,\quad 0\right)^T,$$

$$F_2=\left(\frac{3}{8},\quad -\frac{25}{8},\quad 0,\quad 1,\quad 0\right)^T,$$

$$F_3=\left(-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad 0,\quad 0,\quad 1\right)^T.$$

Sistemaning umumiy yechimi $X=c_1F_1+c_2F_2+c_3F_3$, yoki

$$F=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}19/8\\7/8\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3/8\\-25/8\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Bu yerda c_1, c_2 va c_3 ixtiyoriy sonlar.

n noma'lumli m ta chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi matritsalar yordamida $AX=B$ ko'rinishda ifodalangan bo'lsin. Bunda A - $m\times n$ o'lchovli matritsa, X - n o'lchovli noma'lumlardan iborat ustun vektor, B - m o'lchovli ozod hadlar vektori.

$AX=\Theta$ tenglamalar sistemasi $AX=B$ bir jinsli bo'lmagan sistemaning bir jinsli qismi deyiladi.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimini vektor shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$X=F_0+c_1F_1+\ldots+c_{n-r}F_{n-r}$$

Bu yerda, F_0- dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy yechimlaridan biri (F_0 ni aniqlash uchun erkli o'zgaruvchilarning xususiy qiymatlarida bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi yechiladi); $F_1,\quad F_2,\quad \ldots,\quad F_{n-r}$ – bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasi; $c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_{n-r}$ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

3-misol. Quyidagi

$$\begin{cases}x_1-x_2+\ 2x_3=1\\2x_1+x_2-x_3=2\end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlarini toping.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Bu yerda x_2, x_3 $-$basis o‘zgaruvchilar, x_1 $-$erkli o‘zgaruvchidir. $n=3,\ r=2,\ n-r=1.$

Oxirgi sistemada $x_1=0$, deb olsak, $F_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ xususiy yechimni olamiz.

Endi bir jinsli bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechib fundamental yechimlar sistemasini topamiz. Bir jinsli sistema quyidagi sistemaga ekvivalent

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemada $x_1=1$, deb olsak, $F_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimni olamiz. Demak, umumiy yechim

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

bu yerda c - ixtiyoriy son.

4-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining umumiy yechimini vektor shaklda yozing.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1{,}2 & 1 & 0{,}8 \\ 1 & 0 & 2{,}6 & -1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$F_0=(0{,}6;0{,}8;0;0)$sistemaning xususiy yechimlaridan biri. Bundan foydalanib sistemaning umumiy yechimini vektor shaklida yozamiz:

$$X = F_0 + c_1F_1 + c_2F_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2,6 \\ 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bu yerda $c_1,\ c_2$ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

49. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik yetarli sharti nimadan iborat?
50. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining aniqlik va aniqmaslik yetarli shartlari nimalardan iborat?
51. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi deb nimaga aytiladi?
52. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi qanday shartlar bajarilganda o’zining fundamental yechimlari tizimiga egaligi bilan xarakterlanadi?
53. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimini qurish jarayoni nimalarni o’z ichiga oladi?
54. Vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqligi tushunchasi.
55. Vektorlar sistemasining chiziqli erkliligi tushunchasi.
56. Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi fundamental yechimlari tizimi qurilgan bo’lsa, uning umumiy yechimini vektor shaklda yozish mumkinmi va qanday?
57. Bir jinsli bo’lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning keltirilgan sistemasi deb nimaga aytiladi?
58. Bir jinsli bo’lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning umumiy yechimi vektor shaklda qanday yoziladi?

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

15. Mike Rosser. Basic mathematics for economists. London and New York 1993, 2003y.

16. M.Harrison and P.Waldron Mathematics for economics and finance. London and New York 2011y.

17. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.

18. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA, 2010.

19. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, NY 2005

20. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O'quv qo'llanma. "Iqtisod-moliya". 2017, 386 bet.

21. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. "Iqtisod-moliya". 2017, 746 стр.

4-mavzu. Chiziqli programmalashtirish masalasining yechish usullari

Reja

4.1. Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalalari. Iqtisodiy matematik model tushunchasi.

4.2. Eng sodda iqtisodiy masalalarning matematik modellari. Chiziqli programmalashtirish masalasining umumiy qo'yilishi.

4.3. Chiziqli programmalashtirish masalasining turli formada ifodalanishi.

4.4. Teng kuchli almashtirishlarni bajarib ChPMni kanonik ko'rinishga keltirish.

4.5. Chiziqli programmalashtirish masalasining joiz va bazis yechimlari. Joiz yechimlar to'plamining qavariqligi.

4.6. Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish.

4.7. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechish va tahlil qilish.

Tayanch so'z va iboralar. Matematik model, chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish, stoxastik programmalashtirish, dinamik programmalashtirish. Chiziqli programmalashtirish, chegaralovchi shartlar (cheklamalar), maqsad funksiya, *joiz reja (yechim), bazis yechim (reja), xos va xosmas bazis reja, optimal reja, qo'shimcha o'zgaruvchi, qavariq kombinatsiya, qavariq to'plam, qavariq to'plamning burchak nuqtasi, Gipertekislik, gipertekisliklar oilasi, yechimlar ko'pburchagi, sath to'g'ri chizig'i, aktiv va passiv shartlar, kamyob xom-ashyo.*

Chiziqli programmalashtirish matematik programmalashtirishning bir bo'limi bo'lib, u chegaralangan resurslar (xom-ashyo, texnika vositalari, kapital qo'yilmalar, yer, suv, mineral o'g'itlar va boshqalar)ni ratsional taqsimlab eng ko'p foyda olish yoki eng kam xarajat qilish yo'llarini o'rgatadi.

Chiziqli programmalashtirishning shakllanishi XX asrning ikkinchi yarmidagi iqtisodiy fikrlarning takomillashishiga katta ta'sir ko'rsatdi. 1975 yilda chiziqli programmalashtirish nazariyasini birinchi bor kashf qilgan rus olimi L.V.Kantorovichga va matematik iqtisodiyot bo'yicha mutaxassis, "Chiziqli programmalashtirish" terminining birinchi muallifi, amerika olimi T.Kupmansga Nobel mukofotining berilishi chiziqli programmalashtirishning iqtisodiy nazariyaga qo'shgan hissasini tan olishdan iborat deb hisoblash mumkin.

Chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning, uning tarkibiga kiruvchi noma'lumlarga chegaralovchi shartlar qo'yilganda, eng katta va eng kichik qiymatini izlash va topish uslubini o'rgatuvchi bo'limdir.

Noma'lumlarga chiziqli chegaralashlar qo'yilgan chiziqli funksiyaning ekstremumini topish chiziqli programmalashtirishning predmetini tashkil qiladi. Shunday qilib, chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning shartli ekstremumini topish masalalari turkumiga kiradi.

Iqtisodiy jarayonlarning o'ziga xos qonuniyatlarini o'rganish uchun, birinchi navbatda, bu jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarni tuzish kerak. O'rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarning (masalalarning) matematik modelini tuzish uchun quyidagi bosqichlardagi ishlarni bajarish kerak:

1) masalaning iqtisodiy ma’nosi bilan tanishib, undagi asosiy shartlar va maqsadni aniqlash;
2) masaladagi ma’lum parametrlarni belgilash;
3) masaladagi noma’lumlarni (boshqaruvchi o’zgaruvchilarni) belgilash;
4) masaladagi cheklamalarni, ya’ni boshqaruvchi o’zgaruvchilarning qanoatlantirishi kerak bo’lgan chegaraviy shartlarni chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;
5) masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash.

Boshqaruvchi o’zgaruvchilarning barcha cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funksiyaga eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat bersin. Bundan ko’rinadiki, maqsad funksiya boshqaruvchi noma’lumlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini) topishga yordam beradi. Shuning uchun ham maqsad funksiyani foydalilik yoki optimallik mezoni deb ham ataladi.

Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonini amaliyotda nisbatan ko’p uchraydigan quyidagi iqtisodiy masalalar misolida o’rganamiz.

Ishlab chiqarishni tashkil qilish va rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini i bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun n xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo’lsin. Har bir xom-ashyoning umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan normasi haqidagi ma’lumotlar quyidagi jadvalda berilgan bo’lsin.

Xom-ashyolar / **Mahsulot turlari**	**1**	**2**	**3**	**…**	n	**Daromad**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	c_1

2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	a_{2n}	c_2
...	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\cdots$	a_{mn}	c_m
Xom-ashyolar zahirasi	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	

Jadvaldagi har bir: $b_j - j$ xom-ashyoning umumiy miqdori (zahirasi); $a_{ij} - i$ mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan j xom-ashyo miqdori; c_j – korxonaning j mahsulotning bir birligini sotishdan oladigan daromadi.

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki:

a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir xom-ashyoning miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin;

b) mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo’lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan i mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko’ra noma’lumlar manfiy bo’lmasligi kerak, ya’ni: $x_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak, masalaning maqsadi mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat bo’lib, uni $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$ funksiya orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m},$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_m x_m \to \max .$$

Iste'mol savati masalasi. Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada *n* xil $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ oziqa moddalari kerak bo'lsin, jumladan bir sutkada A_1 oziqa moddasidan kamida b_1 miqdorda, A_2 oziqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 oziqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n ozuqadan b_n miqdorda zarur bo'lsin va ularni *m* ta $B_1, B_2, ..., B_m$ mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo'lsin. Har bir B_i mahsulot tarkibidagi A_j oziqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Ozuqa moddalari / **Mahsulot turlari**	A_1	A_2	A_3	...	A_n	**Mahsulot bahosi**
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1n}	c_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	a_{2n}	c_2
...	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\cdots$	a_{mn}	c_m
Ozuqa moddasining minimal normasi	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: iste'mol savatiga qanday mahsulotlardan qancha miqdorda kiritish kerakki, natijada:

a) odam organizmi qabul qiladigan turli oziqa moddasining miqdori belgilangan minimal miqdordan kam bo'lmasin;

b) iste'mol savatining umumiy bahosi minimal bo'lsin.

Iste'mol savatiga kiritiladigan *i*-mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning

a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \ge b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \ge b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \ge b_n. \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko’ra, undagi noma’lumlar manfiy bo’la olmaydi, ya’ni: $x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masalaning b) sharti uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste’mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo’lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m \to \min.$$

Shunday qilib, iste’mol savati masalasining matematik modeli ko’rinishda bo’ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_m \geq 0,$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \min.$$

Optimal bichish masalasi. Optimal bichish masalasining eng sodda holi bilan tanishamiz. Faraz qilamiz, uzunligi *L* bo’lgan xomaki materiallardan uzunliklari $\Delta_i \quad (i = \overline{1,m})$ bo’lgan m xil detallarning har biridan c_i miqdorda tayyorlash kerak bo’lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni n usul bilan kesish mumkin, hamda har bir j usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda *i* detal tayyorlash va b_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo’lsin. Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo’ladi va hosil bo’lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo’ladi.

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	Kesish usullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	2	…	n	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	c_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{1n}	c_2
…	…	…	…	…	…
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	c_m
Chiqindilar	b_1	b_2	…	b_n	

j usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda yoiziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,$$

$$Y = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \to \min.$$

Misol. Uzunligi 110 sm. bo'lgan po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni kesish yo'llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar Uzunligi	Kesish usullari						Xomaki mahsulotlar i/ch rejasi
	1	2	3	4	5	6	
45 sm.	2	1	1	-	-	-	40
35 sm.	-	1	-	3	1	-	30

50 sm.	-	-	1	-	1	2	20
Chiqindilar	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'ladi?

Yechish: $j-$usul bilan kesiladigan po'lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45sm bo'lgan xomaki mahsulotlardan ja'mi $2x_j + x_2 + x_3$ miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko'ra bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo'lishi kerak, ya'ni $2x_j + x_2 + x_3 = 40$.

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35sm va 50sm bo'lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to'la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda $x_2 + 3x_4 + x_5 = 30$ va $x_3 + x_5 + 2x_6 = 20$ tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma'nosiga ko'ra belgilangan noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, demak $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ ... \ , x_6 \geq 0.$

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo'lgan chiqindilar-ning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funksiya ko'rinishida ifodalaymiz: $Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_{6.}.$

Masalaning shartiga ko'ra bu funksiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya'ni $Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to min.$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ ... \ , x_6 \geq 0,$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to min.$$

Misol. Konditer fabrikasi uch turdagi A, B, C karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom-ashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xom-ashyolar miqdori (me'yori), xom-ashyolarning zahirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyo turlari	**1 tonna mahsulotga xom-ashyo sarfi (t. hisobida)**			**Xom-ashyo zahirasi (t)**
	A	B	C	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Qiyom	0,4	0,4	0,3	600
Quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotishdan olinadigan daromad (sh.b.)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish: Konditer fabrikasida A turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun $0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$ miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zahirasidan, ya'ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak, $0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Xuddi shunday yo'l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin: $0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600$, $0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120$. Fabrika ishlab chiqargan A karameldan $108x_1$, B karameldan $102x_2$, C karameldan $126x_3$ birlik va ja'mi $108x_1 + 112x_2 + 126x_3$ birlik daromad oladi. Bu yig'indini Y bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. natijada quyidagi funksiyaga ega bo'lamiz:

$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \rightarrow max$. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600, \\ \qquad\quad 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0,$$

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \rightarrow max.$$

Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max\ (\min). \qquad (3)$$

Demak, (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funksiyaga minimum (maksimum) qiymat bersin.

Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari, (3) chiziqli funksiya esa masalaning maqsadi yoki **maqsad funksiyasi** deb ataladi.

Muayyan masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, "≥" yoki "≤" ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin.

Ko'p hollarda ChPMsida qatnashayotgan tengsizliklarning ishoralarini bir xil ko'rinishga keltirib olinadi. Shu sababli ChPMsining quyidagi shaklini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1a)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2a}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{3a}$$

uning **standart shakli** deb qabul qilingan.

ChPMsi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min . \tag{6}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda (4)-(6) masala **kanonik** ko'rinishdagi ChPMsi deb ataladi.

ChPMsini (4)-(6) shaklini turli ko'rinishlarda yozish mumkin. Bu ko'rinishlarni keltirib o'tamiz.

ChPMning vektor ko'rinishi. (4)-(6) masalani vektor ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} &P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0, \\ &x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ &Y = CX \to \min, \end{aligned} \tag{7}$$

bu yerda

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ ..., \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ C = (c_1, c_2, ..., c_n).$$

ChPMning matrisa ko'rinishi. (4)-(6) masalaning matritsa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &AX = P_0, \\ &x_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., n, \\ &Y = CX \to \min. \end{aligned} \tag{8}$$

bu yerda $A=(a_{ij})$.

Ba'zi hollarda (4)-(6) masala quyidagacha ifodalanadi:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m},\\ &x_j \geq 0,\\ &Y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min.\end{aligned} \tag{9}$$

Har qanday ChPMsini (4)-(6) ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun quyidagilarni amalga oshirish zarur: ChPMda qatnashayotgan tengsizliklarni tenglamaga keltirish kerak. Bu quyidagicha amalga oshiriladi.

Masalan, $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n \leq b$ ko'rinishdagi tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikning chap tamoniga qandaydir nomanfiy x_{n+1} o'zgaruvchini shunday qiymat bilan qo'shamizki, natijada tengsizlik tenglikka aylansin:

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+x_{n+1}=b,$$

bu yerda

$$x_{n+1}=b-a_1x_1-a_2x_2-...-a_nx_n \geq 0$$

o'zgaruvchi **qo'shimcha o'zgaruvchi** deb ataladi.

Teorema. Berilgan $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n \leq b$ tengsizlikning har bir $X_0=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ yechimiga $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+x_{n+1}=b$ tenglamaning bitta va faqat bitta yagona $Y_0=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_{n+1})$ yechimi mos keladi va aksincha.

Isbot: Faraz qilaylik, X_0 tengsizlikning yechimi bo'lsin. U holda

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n \leq b,$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Tengsizlikning chap tomonini o'ng tomonga o'tkazib hosil bo'lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz: $0 \leq b-(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n)=\alpha_{n+1}$.

Endi $Y_0=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_{n+1})$ vektor tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatamiz:

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n+\alpha_{n+1}=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n+(b-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-...-a_n\alpha_n)=b.$$

Endi agar Y_0 tenglamani qanoatlantirsa, u holda u tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Shartga ko'ra: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b, \quad \alpha_{n+1} \geq 0.$ Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \geq 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq b,$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko'rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo'l bilan ChPMsining chegaralovchi shartlaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e'tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir-birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o'zgaruvchilarni qo'shish kerak.

Masalan, agar ChPMsi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; ..., \; x_n \geq 0, \tag{10}$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$$

shaklda bo'lsa, bu masaladagi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{n+1} \geq 0, \; x_{n+2} \geq 0, \; ..., \; x_{n+m} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o'zgaruvchilar *Y* funksiyaga 0 koeffisiyent bilan kiritiladi. Natijada (10) masala quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; ..., \; x_n \geq 0, \; x_{n+1} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0, \tag{11}$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \; ... + c_nx_n + 0(x_{n+1} + ... + x_{n+m}) \to \min.$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0, \tag{12}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

shakldа berilgan ChPMsini kanonik shaklgakeltirish mumkin. Buning uchun qo'shimcha $x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \ge 0$ o'zgaruvchilar tengsizliklarning katta tomonidan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0, \tag{13}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min.$$

Agar ChPMda maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

ko'rinishda bo'lsa, uni kanonik shaklda yozish uchun c_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ qarama-qarshi ishora bilan yozib olinib

$$\tilde{Y} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \to \min$$

ifodani hosil qilamiz.

Misol. Quyidagi ChPMsini kanonik ko'rinishga keltiring va uni turli ko'rinishlarda ifodalang:

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad - 3x_3 \le -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6, \end{cases} \tag{14}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max.$$

Yechish: Masalaning cheklamalaridagi birinchi va uchinchi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, ularni tenglamalarga aylantiramiz, hamda birinchi tenglamaning ikki tomonini -1 ga ko'paytirib undagi ozod hadni musbat songa aylantiramiz va (14) masalaga teng kuchli bo'lgan quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \end{cases} \tag{15}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Ushbu masalada $Y \to \max$ ifodani qarama-qarshi ishora bilan olib, uni $Y \to \min$ bilan almashtiramiz. Natijada berilgan masalaning kanonik shakliga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \end{cases} \tag{16}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0,$$

$$Y = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0(x_4 + x_5) \to \min .$$

(16) masalaning matrisa ko'rinishini yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U holda (16) masalaning matrisa shakli quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\begin{aligned} & AX = B, \\ & x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}, \\ & Y = C^T X \to \min. \end{aligned} \tag{17}$$

(16) masalani vector ko'rinishlarda yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$X = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5),\ C = (-3,\ 2,\ -1,\ 0,\ 0).$$

U holda (16) masala quyidagi ko’rinishga keladi:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 = P_0,$$

$$x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,5}, \tag{18}$$

$$Y = CX \to \min.$$

Endi matritsasi yechimlari va ularning xossalari bilan tanishamiz.

Ta’rif. (4)-(6) masalaning **joiz yechimi** (joiz rejasi) deb, (4), (5) shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorga aytiladi.

(4)-(6) masalaning joiz yechimlar to’plami uning mumkin bo’lgan (joiz) yechimlar to’plamini tashkil etadi: $K_m = \left\{ X(x_1,...,x_n) : AX^T = P_0,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n} \right\}$. Bu yerda $r(A) = m < n$.

Ta’rif. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in K_m$ joiz rejaning $n - m$ ta koordinatasi $(m < n)$ nolga teng bo’lib, qolgan $x_1, x_2, ..., x_m$ koordinatalariga mos $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar chiziqli erkli bo’lsa, u holda $X^0 \in K_m$ joiz reja **bazis reja** deyiladi.

Ta’rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo’lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda esa bu reja **aynigan bazis reja** deyiladi.

Ta’rif. (4)-(6) masalaning (6) chiziqli funksiyasiga eng kichik qiymat beruvchi $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis reja masalaning **optimal rejasi** (optimal yechimi) deyiladi.

(4)-(6) masalaning joiz yechimlari to’plami xossalarini o’rganish uchun ba’zi tushunchalarni kiritamiz.

$A_1, A_2, ..., A_n$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. Ma'lumki, R^n fazoda har bir $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ vektorga koordinatalari $(a_1,a_2,...,a_n)$ bo'lgan nuqta mos keladi. Shuning uchun bundan keyin $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ vektorni R^n fazo nuqtasi deb qaraymiz.

Ta'rif. $A=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+...+\alpha_n A_n$ nuqtalar to'plami $A_1, A_2, ..., A_n$ nuqtalarning **qavariq kombinasiyasi** deb ataladi. Bu yerda $\alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. $C \in R^n$ to'plam berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $A_1 \in C$ va $A_2 \in C$ nuqtalar bilan bir qatorda bu nuqtalarning $A=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2 \quad (0\leq\alpha_1\leq 1,\ 0\leq\alpha_2\leq 1,\ \alpha_1+\alpha_2=1)$ qavariq kombinatsiyasidan iborat nuqta ham C to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni $A_1 \in C,\ A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo'lsa, u holda C to'plam **qavariq to'plam** deb ataladi.

Qavariq to'lamning geometrik ma'nosini tushuntirish uchun A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma tushunchasini kiritamiz.

Ma'lumki, A_1 va A_2 nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$A(\alpha)=A_2+(A_1-A_2)\alpha$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda A_1-A_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori. Agar $\alpha=0$ bo'lsa, u holda $A(0)=A_2$;

Agar $\alpha=1$ bo'lsa, u holda $A(1)=A_1$.

Agar $0\leq\alpha\leq 1$ bo'lsa, u holda $A(\alpha)$ – A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadagi nuqtalarni aks ettiradi.

Teorema. ChPMsining joiz yechimlaridan tashkil topgan to'plam qavariq to'plam bo'ladi.

Isbot: ChPMsining ixtiyoriy ikkita yechimining qavariq kombinasiyasi ham yechim ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 ChPMsining yechimlari bo'lsin. U holda

$$AX_1^T=P_0, \quad x_{1j}\geq 0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{19}$$

$$AX_2^T=P_0, \quad x_{2j}\geq 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{20}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. X_1 va X_2 yechimlarning qavariq kombinasiyasini tuzamiz.

$$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2, \qquad 0\leq\alpha\leq 1,$$

hamda uni yechim ekanligini ko'rsatamiz:

$$AX^T = A\left[\alpha X_1^T + (1-\alpha)X_2^T\right] = \alpha AX_1^T + (1-\alpha)AX_2^T,$$

(19) va (20) tenglamalarni inobatga olsak:

$$AX^T = \alpha P_0 + (1-\alpha)P_0 = P_0.$$

Bu munosabat X vektor ham yechim ekanligini ko'rsatadi. Demak, ChPMsining yechimlaridan tashkil topgan to'plam qavariq to'plam bo'ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar k ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan $P_1, P_2, ..., P_k$ vektorlar berilgan bo'lib, ular uchun

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_kx_k = P_0$$

tenglik barcha $x_i > 0$ lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, .., 0)$ nuqta *K* qavariq to'plamning burchak nuqtasi bo'ladi.

Teorema. Qavariq to'plamning ixtiyoriy nuqtasini uning burchak nuqtalarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Teorema. ChPMsi o'zining optimal qiymatiga shu masalaning joiz yechimlaridan tashkil topgan qavariq to'plamning burchak nuqtasida erishadi. Agar masala birdan ortiq burchak nuqtada optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham o'zining optimal qiymatiga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *K* to'plamning burchak nuqtasi bo'lishi uchun musbat x_i komponentalar $P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0$ yoyilmada o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan P_i vektorlarning koeffisiyentlaridan iborat bo'lishi zarur va yetarli.

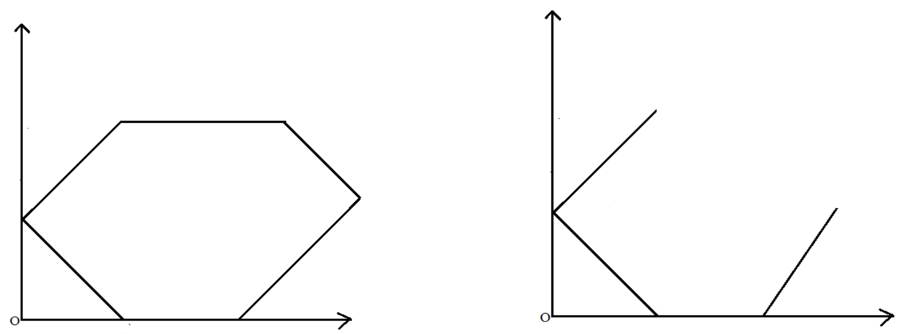
2-xulosa. ChPMsining bazis yechimiga K_m qavariq to'plamning burchak nuqtasi mos keladi va aksincha.

3-xulosa. ChPMsining optimal yechimini K_m to'plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

ChPMsini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilish uchun quyidagi statandart masalani ko'ramiz:

$$
\begin{aligned}
&Ax \le B \\
&x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n} \\
&Y = CX \to \max
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Ma’lumki, (21) masalaning har qanday rejasini *n*-o’lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga yana shu ham ma’lumki, chiziqli tengsizliklar bilan aniqlangan bunday nuqtalar to’plami qavariq to’plamdan iborat bo’ladi. Bu holda qavariq to’plam (qavariq ko’pburchak yoki ko’pyoq) chegaralangan yoki chegaralanmagan bo’lishi, bitta nuqtadan iborat bo’lishi yoki bo’sh to’plam bo’lishi ham mumkin. Masalan, qavariq to’plamlar



a) chegaralangan b) chegaralanmagan

(21) masalani geometrik nuqtai nazardan tahlil qilamiz. Buning uchun quyidagi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b, \tag{22}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o’rni bilan tanishib chiqamiz.

Ma’lumki, koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{23}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, ...x_n$ nuqtalar to’plami gipertekislik deb ataladi. Demak, (21) masalada (23) kabi tengliklar qatnashsa ular gipertekisliklarni ifodalaydi. Har qanday gipertekislik fazoni ikki yarim fazoga ajratadi. Bu yarim fazolardan faqat bittasigina (22) tengsizlikni qanoatlantiradi. (22) tengsizlikni qanoatlantiradigan yarim fazoni aniqlash uchun $O(0,0,...,0)$ koordinata boshidan foydalanamiz, ya’ni:

agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (2) tengsizlikni to’g’ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuqtani o’z ichiga oluvchi yarim fazo (22) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o’rni bo’ladi;

agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (22) tengsizlikni noto'g'ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuiqtani o'z ichiga olmaydigan yarim fazo (22) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki, (21) masalada nechta tensizlik qatnashsa ular shuncha yarim fazoni ifodalaydi. Bu yarim fazolarning kesishmasi esa (21) masalaning barcha joiz yechimlarini o'z ichiga oluvchi qavariq to'plamni tasvirlaydi. Bu qavariq to'plam masalaning joiz yechimlar sohasi deb ataladi.

(21) masalaning optimal yechimini topish uchun $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ maqsad funksiyasidan foydalanamiz. Buning uchun

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = const \tag{24}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi gipertekisliklar oilasini qaraymiz.

Ma'lumki, bu yerda $const$ ning har bir qiymatiga bitta gipertekislik mos keladi. ChPMsining qavariq to'lami bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'lgan gipertekisliklar "sath gipertekisliklar" deyiladi. ChPMsining qavariq to'plami bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan gipertekislik, ya'ni urinma gipertekislik tayanch gipertekislik deyiladi. Tayanch gipertekislikni hosil qilish uchun (24) tenglikdagi $const$ ga turli qiymatlar berib uni gipertekislikning normal vektori bo'ylab parallel ko'chiramiz va urinma gipertekislikni hosil qilamiz.

Shuni ta'kidlaymizki, Y funksiyaning maksimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalashi bo'ylab, Y funksiyaning minimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalashiga qarama-qarshi harakatlanish kerak.

$n = 2$ o'lchovli fazoda, ya'ni tekislikda ChPMsini geometrik nuqtai nazardan ko'rib chiqamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b._m \end{cases} \tag{25}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{26}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{27}$$

Faraz qilaylik, (25) sistema (26) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega va ulardan tashkil topgan to'plam chegaralangan bo'lsin.

Ma’lumki, (25) va (26) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ (i = \overline{1,m}),$$
$$x_1 = 0, \ \ x_2 = 0$$

to’g’ri chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Bu tekisliklarni ko’rib chiqamiz.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \ \ (i = \overline{1,m}) \tag{28}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to’plamini aniqlash uchun $O(0,0)$ nuqtadan foydalanamiz. Agar $O(0,0)$ nuqta (28) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda qidirilayotgan teksilik $O(0,0)$ nuqtani o’z ichiga oladi, aks holda qidirilayotgan tekislik $O(0,0)$ nuqtani o’z ichiga olmyadi. Yuqoridagi mulohazalar asosida (25) sistemaning yechimlaridan iborat qavariq ko’pburchakni topib olganimizdan so’ng (26) tengsizliklarni e’tiborga olamiz. (26) tengsizliklar (25) yordamida topilgan qavariq ko’pburchakning I chorakdagi qismini ajratib olishga yordam beradi. (25) va (26) cheklamalarni qanoatlantiruvchi qavariq ko’pburchakni reja ko’pburchagi deb ataymiz.

(5)-(7) masalaning optimal yechimini topish uchun (27) ifodada qatnashayotgan chiziqli funksiyadan hosil qilinadigan

$$c_1x_1 + c_2x_2 = const \tag{29}$$

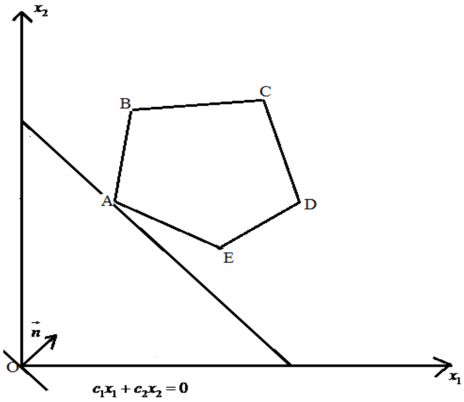
to’g’ri chiziqlar oilasidan foydalanamiz. Ma’lumki, (29) ifodadagi har bir ma’lum o’zgarmas $C_0 = const$ qiymatida bitta

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

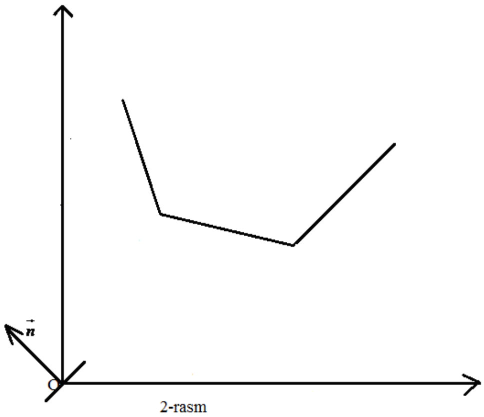
sath to’g’ri chizig’i to’g’ri keladi.

So’ngra, bu sath to’g’ri chiziqlardan birini, masalan, $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to’g’ri chiziqni chizib olamiz. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ chiziqni $\vec{n}(c_1, c_2)$ normal vektor bo’ylab parallel ko’chirib, reja ko’pburchagiga $c_1x_1 + c_2x_2 = C^0$ tayanch (urinma) to’g’ri chiziqni topib olamiz. Bu yerda C^0 (5)-(7) masalaning optimal yechimi yoki qiymati; $X^0(x_1^0, x_2^0)$ urinish nuqtasi esa (5)-(7) masalaning optimal rejasi deb ataladi.

Ba’zi xususiy hollarni ko’rib chiqamiz. Faraz qilaylik, reja ko’pburchakgi $ABCDE$ beshburchakdan iborat bo’lsin.



1-Rasm



2-rasm

Rasmdan ko'rinib turibdiki, chiziqli funksiya o'zining minimal qiymatiga $ABCDE$ qavariq ko'pburchakning *A* nuqtasida erishadi. *C* nuqtada esa, u o'zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi.

Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsin. Bunday ko'pburchaklardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

1-hol. 2-rasmdagi holatda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq $\vec{n}$ vektor bo'ylab siljib borib har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi.

Bu holda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ funksiya minimal qiymatga ham, maksimal qiymatga ham erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya (5) va (6) cheklamalar bilan aniqlangan sohada quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan bo'ladi.

Misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$
$$Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

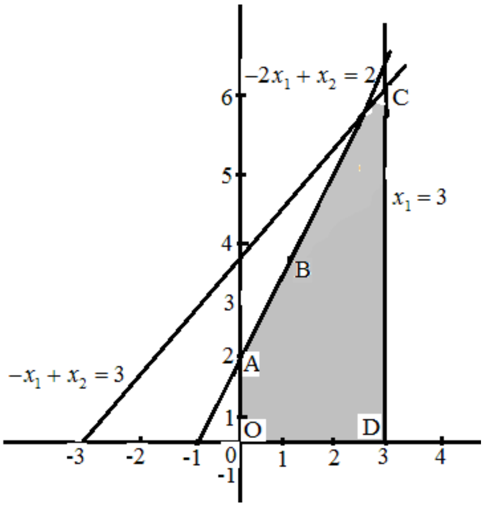
Yechish: Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

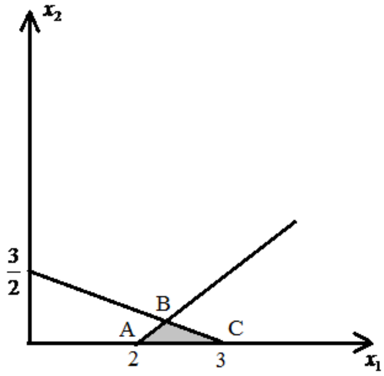
chiziqlar bilan chegaralangan

$$-2x_1 + x_2 \le 2, -x_1 + x_2 \le 3, x_1 \le 3$$

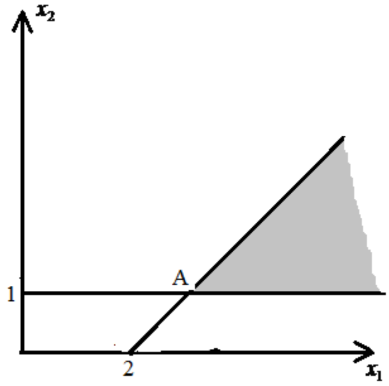
yarim tekisliklarni koordinatalar sistemasining I choragida yasaymiz, chunki $x_1, x_2 \geq 0$



Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plami bo'yalgan *OABCD*- beshburchakni tashkil qiladi. Natijada $Z = -x_1 - 2x_2$ chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi $C(3;6)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari masalaning optimal rejasi, $Z(C) = -15 \rightarrow \min$ esa masalaning optimal yechimi bo'ladi.[1]



1-rasm



2-rasm

Misol. Berilgan ChPMsini grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$
$$Y = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Yechish: Bu yerda ham yuqoridagidek yechimlar ko'pburchagini hosil qilamiz.

[1] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 97-98.

Yuqoridagi 1-rasmdan ko'rinadiki, yechimlar ko'pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\vec{n}(2;2)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan $2x_1 + 2x_2 = 0$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq $2x_1 + 2x_2 = const$ to'g'ri chiziqlar oilasidan biri bo'ladi. Shakldan ko'rinadiki, masalada maqsad funksiyaning qiymati yuqoridan chegaralanmagan.

Misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$Y = x_1 - 2x_2 \to \max$$

Yechish: Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega bo'lamiz.

Yuqoridagi 2-rasmdan ko'rinadiki, yechimlar to'plami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u $X^0(2,5;1)$ nuqta koordinatalaridan iborat.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, agar ChPMda noma'lumlar soni $n = 2$ bo'lganda uning optimal yechimini gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Agar ChPM kanonik ko'rinishda berilgan bo'lib, tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenglamalar sonidan 2 taga ko'p bo'lsa, ya'ni $n - m = 2$ bo'lsa, bunday ChPMlarining optimal yechimlarini ham gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Iqtisodiy masalalarning optimal yechimlarining tahlili. Endi ChPMsining optimal yechimini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi iqtisodiy masalaning optimal yechimini quramiz va tahlil qilamiz.

Faraz qilaylik, korxonada ikki xil bo'yoq ishlab chiqarilsin. Bu bo'yoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xom-ashyodan foydalanilsin. Xom-ashyolarning zahirasi 6 va 8 birlikni tashkil qilsin. Ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talab 2 birlikdan oshmasin va u birinchi bo'yoqqa bo'lgan talabdan 1 birlikka katta bo'lsin.

Har bir bo'yoqning bir birligini ishlab chiqarish uchun kerak bo'lgan xom-ashyolar miqdori, hamda korxonaning har bir birlik bo'yoqni sotishdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyolar / **Bo'yoqlar**	**1**	**2**	**Foyda**
I	1	2	3

II	2	1	2
Zahira	6	8	

Har bir bo'yoqdan qanchadan ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xom-ashyolar miqdori ularning zahiralaridan oshmaydi, daromad eng yuqori bo'ladi, hamda talab bo'yicha shartlar bajariladi? Masalaning optimal rejasini toping.

Masaladagi noma'lumlarni belgilaymiz:

x_1 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan I mahsulotning miqdori;

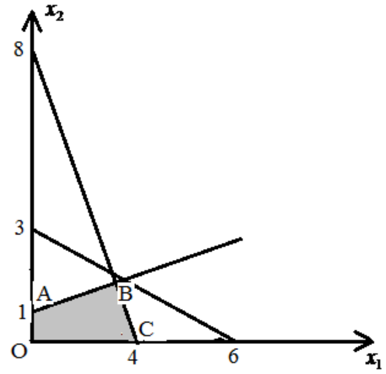
x_2 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan II mahsulot miqdori.

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 - x_1 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$Y = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

Masalani grafik usulda yechib, $D(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz.



Optimal yechim quyidagicha bo'ladi: $x_1 = 3\frac{1}{3};\ x_2 = 1\frac{1}{3};\ Y_{\max} = 12\frac{2}{3}$. Demak, korxona birinchi bo'yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladigan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo'ladi: $X^0\left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right),\ Y = 12\frac{2}{3}$.

Endi masalaning optimal yechimini tahlil qilamiz. Buning uchun $D-$ optimal nuqtani qaraymiz. Bu nuqta $2x_1 + x_2 = 8$ va $x_1 + 2x_2 = 6$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi. Bu esa, buyoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xom ashyoning ham kamyob ekanligini ko'rsatadi. Optimal nuqta bilan bog'liq bo'lgan bu shartlar aktiv shartlar , optimal nuqtaga bog'liq bo'lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko'rayotgan masalada mahsulotlarga bo'lgan talabga qo'yilgan $-x_1 + x_2 \le 1$ va $x_2 \le 2$ shartlar optimal nuqtaga bog'liq emas va shu sababli bu shartlar passiv shartlar.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo'lmaydi va ularning ma'lum darajada o'zgarishi optimal yechimga ta'sir qilmaydi.

Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o'zgarishiga olib keladi.

Masalan, 1-xom ashyo zahirasini bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta'sir ko'rsatishini ko'rish uchun uning zahirasini 7 ga teng deb olamiz. U holda *CD* to'g'ri chiziq o'ziga parallel ravishda yuqoriga ko'tariladi va *DCK* uchburchak reja ko'pburchagiga qo'shiladi. Natijada *K* nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada $x_1 = 2;\ x_1 + 2x_2 = 7;\ 2x_1 + x_2 = 8$ to'g'ri chiziqlar kesishadi. Shuning uchun endi masalaning $0 \le x_2 \le 2;\ x_1 + 2x_2 \le 7;\ 2x_1 + x_2 \le 8$ shartlar aktiv shartlarga aylanadi. Demak, yangi optimal yechim: $X^0(2,3), Y_{\max} = 13.$

Xuddi shunday yo'l bilan 2-xom ashyoni bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o'zgartirishini ko'rsatish mumkin.

Bundan tashqari kamyob bo'lmagan xom-ashyolar miqdorini, optimal yechimga ta'sir qilmagan holda, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi 8-shaklda *BC* kesma $x_1 = 2$ chiziqni, ya'ni masalaning 4 shartini ifodalaydi. Ma'lumki, bu – passiv shart. Maqsad funksiya qiymatini o'zgartirmagan holda passiv shartni qanchalik o'zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun *BC* kesmani o'ziga parallel ravishda pastga, *D* nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2 = \frac{4}{3}$ bo'ladi.

Demak, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talabni optimal yechimga ta'sir qilmasdan $\frac{4}{3}$ gacha kamaytirish mumkin ekan.

Shunday yo’l bilan masalaning optimal yechimiga ta’sir etmasdan uning boshqa passiv shartning o’ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko’rsatish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Fermada qo’ng’ir va sariq quyonlar parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi ozuqa ishlatiladi. Qo’ng’ir va sariq quyonlar uchun har kungi zarur bo’lgan har bir turdagi ozuqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin bo’lgan har bir turdagi ozuqaning umumiy miqdori va 1 ta qo’ng’ir va sariq quyon terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	**Kunlik zarur bo’lgan ozuqa birligi miqdori**		**Oziqaning umumiy miqdori**
	Qo’ng’ir quyon	**Sariq quyon**	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \end{cases}$

$Z = -x_1 - x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \geq 0.$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$

$Z = x_1 - 2x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \geq 0.$

4. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ -2x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$

$Z = -5x_1 - 7x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \geq 0.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 13x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 6x_1 - x_2 \ge 12 \end{cases}$

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$ [2]

$x_1, x_2 \ge 0.$

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

1. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.
2. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA, 2010.
3. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, NY 2005
4. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
5. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O’quv qo’llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017, 386 bet.
6. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017, 746 стр.
7. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming, Springer, 2008
8. Safayeva Q., Shomansurova F. “Matematik programmalashtirish fanidan mustaqil ishlar majmuasi”. O’quv qo’llanma. T., 2012.
9. Safayeva Q., Mamurov I., Shomansurova F. “Matematik programmalash fanidan masalalar to’plami”. T., 2013.

5-mavzu. Chiziqli programmalashtirish masalasini

simpleks usulida yechish

Reja

5.1. Simpleks usuli haqida.
5.2. Simpleks jadvalida almashtirishlarni bajarish.
5.3. Optimal yechimni aniqlashga doir teoremalar.
5.4. Maqsad funksiyaning chekli minimumga ega bo'lmaslik sharti.
5.5. Simpleks usuli.
5.6. Sun'iy bazis, sun'iy vektor.
5.7. Sun'iy bazis vektor usulining mohiyati.
5.8. Sun'iy bazis vektor usulida bazis yechimning optimallik sharti.
5.9. ε-usuli.

Tayanch so'z va iboralar. Simpleks usuli, optimallik bahosi, sun'iy o'zgaruvchilar.

Simpleks usuli eng keng foydalaniladigan barcha raqamli algoritmlardan foydalanadigan keng tarqalgan chiziqli dasturlash usullaridan biri. Bu 1940 yilda ishlab chiqilgan bo'lib chiziqli dasturlash model sifatida ham iqtisodiy ham harbiy rejalalarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.

Simpleks usuli faqat chiziqli dasturlash muammolarini yechishga qaratilgan bo'lsada uning yechish texnikalari umumiy qiziqishga sazovordir. Shu texnikasi chiziqsiz optimallashtirish muammolarini chiziqli cheklovlardan foydalanish va chiziqsiz cheklovlarni umumiylashtirish mumkin.

Simpleks usuli iqtisodiyot uchun muhim tarixiy aloqalarga ega va bu usul bilan bog'liq atamashunoslikka katta hissa qo'shgan. Misol uchun xarajatlar va soya narxlar degan iborani gapirish. Ko'p ilovalar uchun bu atamalar foydali va bu chiziqli dasturlash modelini talqin qilishda foydalaniladi.

Dansig yaratgan simpleks usul bilan chiziqli progammalash masalasining optimal yechimini topish uchun ChPMsi kanonik shaklda va cheklamalar sistemasi keltirilgan tenglamalar sistemasi shaklida bo'lishi kerak. Simpleks usuli ChPMsining optimal yechimini chekli qadamdan so'ng topishga yordam beradi.

Bizga quyidagi ChPMsi berilgan bo'lsin.

$$Z = C^T x \to \min$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

bu yerda $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ko'rinishda ifodalanadi.

Bu bazis o'zgaruvchilarning vektori esa nolga teng bo'lgan bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarning vektori. Maqsad funksiya quydagicha yoziladi:

$$Z = C_B^T x_B + C_N^T x_N,$$

bu yerda bazis o'zgaruvchilarning koeffisiyentlarida, bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarning koeffisiyentlari esa da va biz tenglikni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Qaytadan yozilganda quydagicha bo'ladi:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarni qiymati o'zgartirish orqali $Ax = b$ tenglikka barcha mumkin bo'lishi bo'lgan barcha yechimlarni qo'lga kiritamiz.

Bu formulani Z formulaga alishtirsak biz quydagi formula kelib chiqadi

$$Z = C_B^T B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T B^{-1} N) x_N.$$

Agar biz $y = (C_B^T B^{-1})^T = B^{-T} C_B$, ni aniqlasak, Z ni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Z = y^T b + (C_N^T - y^T N) x_N.$$

Bu formula samaraliroq. y vektor simpleks vektorning ko'paytiruvchilaridir.

Maqsad funksiya va bazis o'zgaruvchilarning qiymati $x_N = 0$ qiymat qo'yish orqali topiladi.

$$x_B = \widehat{b} = B^{-1}b \quad \text{va} \quad \widehat{Z} = C_B^T B^{-1} b.$$

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	C_B^T	C_N^T	0
x_B	B	N	b

va bazis asosda jadval quyidagicha bo'ladi

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	0	$C_N^T - C_B^T B^{-1} N$	0
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Bu simplek jadvalining rasmiy formulalari hisoblanadi[3].

Bizga quyidagi ChPMsi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \quad x_2 \quad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad x_m + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min \tag{3}$$

Ko'rinib turibdiki bu masalada (1) cheklamalar keltirilgan tenglamalar sistemasi ko'rinishidadir. (1) sistemani vektor shaklida yozib olamiz:

[3]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 125-137.

$$P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_mx_m+P_{m+1}x_{m+1}+\ldots+P_nx_n=P_0,$$

bu yerda $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m$ vektorlar sistemasi m-o’lchovli fazoda chiziqli erkli birlik vektorlar sistemasidan iborat bo’lib, bazis vektorlar sistemasini tashkil etadi. Ular m-o’lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ o’zgaruvchilar “**bazis** (erksiz) **o’zgaruvchilar**” deb ataladi. $x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n$ o’zgaruvchilar bazis bo’lmagan (erkli) o’zgaruvchilar. Agar erkli o’zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o’zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo’ladi. Natijada $X_0=(b_1,b_2,\ldots,b_m,0,\ldots,0)$ bazis yechim hosil bo’ladi. Bu yechimni boshlang’ich bazis yechim deb ataymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: $P_b -$ bazis vektorlar sistemasi; $C_b -$ maqsad funksiyasida bazis o’zgaruvchlar oldidagi c_i koeffisiyentlar.

Yuqoridagilardan foydalanib quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}		a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}		a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	...	…		…	…	…
P_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}		a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}		a_{mk}	…	a_{mn}

Bu jadval **simpleks jadvali** deb ataladi. $X_0=(b_1,b_2,\ldots,b_m,0,\ldots,0)$ boshlangich bazis rejani optimallikka tekshirish uchun bu jadvalga qo’shimcha $\Delta=\left\{\Delta_0,\ \Delta_j\right\},\ \ j=\overline{1,n}$ satr kiritamiz.

Jadvalning P_0 ustiniga mos Δ_0 ni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_0\equiv Y_0=\sum_{i=1}^{m}b_ic_i\,. \tag{4}$$

Jadvalning P_j ustinlariga mos Δ_j larni esa quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i - c_j . \qquad (5)$$

U holda yuqoridagi jadval quyidagi ko'rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_l	c_l	b_l	0	0	$\dots$	0	a_{lm+1}	$\dots$	a_{lk}	$\dots$	a_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	$\dots$	Δ_m	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_k	$\dots$	Δ_n

(5) formuladan ko'rinib turibdiki, simpleks jadvaldagi bazis vektorlarga mos Δ_j lar har doim 0 ga teng.

Agar c_j ustunlarga mos barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \le 0$ shart bajarilsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechim optimal yechim bo'ladi. Y chiziqli funksiyaning minimal qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, $\Delta_j \le 0$ shart (1)-(3) ChPMsi uchun **optimallik sharti** deyiladi.

Agar kamida bitta *j* uchun $\Delta_j > 0$ bo'lsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ masalaning optimal yechimi bo'la olmaydi.

Bunday holatda topilgan $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bazis rejani optimal rejaga yaqin bo'lgan boshqa bazis rejaga almashtirish kerak.

Yangi bazisga kiritiladigan vektorni

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j \qquad (6)$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\max\limits_{\Delta_j>0}\Delta_j=\Delta_k$ bo'lsin. Demak, yangi bazislar sistemasida P_k vektor bazis vektor sifatida qatnashishi kerak. Agar P_k bazisga kiritilsa, u holda eski P_i-bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak, chunki (1) sistemaga mos A matrisaning rangi: $rang(A)=m$. Bazisdan chiqariladigan $P_i,\ i=\overline{1,m}$ vektorni aniqlash uchun $\frac{b_i}{a_{ik}}$ nisbat orqali aniqlovchi koeffisiyent tushunchasini kiritamiz. Bazisdan chiqariladigan $P_i,\ i=\overline{1,m}$ vektorni

$$\min_{a_{ik}>0}\frac{b_i}{a_{ik}} \tag{7}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{ik}>0}\frac{b_i}{a_{ik}}=\frac{b_l}{a_{lk}}$ bo'lsin. Demak, P_l vektor bazisdan chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan l satrdagi P_l vektor o'rniga u joylashgan k ustundagi P_k vektor bazis vektor sifatida kiritiladi. Buning uchun simpleks jadvalida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi.

1. l satrdagi barcha: $b_l,\ a_{lj}$ elementlarni a_{lk} hal qiluvchi elementga bo'lib, bu satrda $\frac{b_l}{a_{lk}},\ \frac{a_{l1}}{a_{lk}},\ \ldots,\frac{a_{lk-1}}{a_{lk}},\ 1,\ \frac{a_{lk+1}}{a_{lk}},\ \ldots,\ \frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ elementlarni hosil qilamiz. U holda jadval quyidagi ko'rinishga keladi:

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_k	$\ldots$	c_n	a.k
			P_1	P_2	$\ldots$	P_m	P_{m+1}	$\ldots$	P_k	$\ldots$	P_n	
P_1	c_1	b_1	1	0	$\ldots$	0	a_{1m+1}	$\ldots$	a_{1k}	$\ldots$	a_{1n}	$\frac{b_1}{a_{1k}}$
P_2	c_2	b_2	0	1	$\ldots$	0	a_{2m+1}	$\ldots$	a_{2k}	$\ldots$	a_{2n}	$\frac{b_2}{a_{2k}}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	...	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	0	$\ldots$	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	$\ldots$	1	$\ldots$	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$	$\boxed{\frac{b_l}{a_{lk}}}$

$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}	$\frac{b_m}{a_{mk}}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	$\dots$	Δ_m	Δ_{m+1}	$\dots$	$\boxed{\Delta_k}$	$\dots$	Δ_n	

2. P_k vektorni bazis vektorga aylantirish uchun, ya’ni jadvalni quyidagi

P_b	C_b	P_0	c_1	$\dots$	c_l	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	$\dots$	P_l	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	$\dots$	$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	$\dots$	0	$\tilde{a}_{1m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\tilde{a}_{1n}$
P_2	c_2	b_2	0	$\dots$	$-\frac{a_{2k}}{a_{lk}}$	$\dots$	0	$\tilde{a}_{2m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\tilde{a}_{2n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	$\dots$	$\frac{1}{a_{lk}}$	$\dots$	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	$\dots$	$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	$\dots$	1	$\tilde{a}_{mm+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\tilde{a}_{mn}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	$\dots$	$\tilde{\Delta}_l$	$\dots$	Δ_m	$\tilde{\Delta}_{m+1}$	$\dots$	$\tilde{\Delta}_k$	$\dots$	$\tilde{\Delta}_n$

ko’rinishga keltirish uchun jadvalda quyidagi elementar almashtirishlarni bajaramiz:

$$\tilde{b}_i = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik}; \;\; \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}; \; i \neq l. \qquad (8)$$

Bu jarayonni barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Har bir qadamda $\Delta_j \leq 0$ optimallik shartini tekshirib boramiz.

Shunday qilib quyidagi teoremalar o’rinli.

1-teorema. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0,\ x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ bazis reja uchun $\Delta_j \le 0$, $(j = \overline{1,n})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2-teorema. Agar X^0 bazis rejada biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ shart o'rinli bo'lib qolsa, u holda X^0 optimal reja bo'lmaydi va uholda shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1) < Y(X^0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar uchun $a_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ bo'lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Shuning uchun quyidagi shartlarga:

1. $\Delta_j > 0$; 2. $a_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

(1)-(3) masalaning optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti deyiladi.

Agar ChPMsida maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda masalaning optimallik sharti sifatida:

$$\Delta_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n})$$

tengsizlikni; masalaning optimal yechimga ega bolmaslik sharti sifatida esa:

1. $\Delta_j > 0$; 2. $a_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

tengsizliklarni qabul qilamiz.

1-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching[4].

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2; \\ -x_1 + 2x_2 \le 7; \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ (j = 1, 2.)$$
$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

[4]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 136.

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7; \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, ..5.)$$

$$Y = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

P_b	C_b	P_0	-1	-2	0	0	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	$\boxed{2}$
P_4	0	7	-1	2	0	1	0	782
P_5	0	3	1	0	0	0	1	-
Δ_j		0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	
P_2	-2	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	3	0	-2	1	0	$\boxed{1}$
P_5	0	3	1	0	0	0	1	3
Δ_j		-4	$\boxed{5}$	0	-2	0	0	
P_2	-2	4	0	1	-1/3	2/3	0	-
P_1	-1	1	1	0	-2/3	1/3	0	-
P_5	0	2	0	0	2/3	-1/3	1	3
Δ_j		-9	0	0	4/3	-5/3	0	
P_2	-2	5	0	1	0	1/2	1/2	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	-1/2	3/2	

Δ_j	-13	0	0	0	-1	-2	

Simpleks usulning I bosqichida bazis vektorlar sistemasiga P_3 vektor kiritilib P_2 vektor bazisdan chiqarildi, II bosqichida P_4 bazisga kiritildi va P_1 bazisdan chiqarildi. Simpleks jadval (8) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi: $X_0 = (3, 5, 3, 0, \ 0,)$, $Y_{\min} = -13$.

2-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.[5]

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2; \\ -x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \ (j = 1, 2.)$$
$$Z = -x_1 \to \min.$$

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \ (j = 1, 2, ..5.)$$
$$Z = -x_1 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	-1	0	0	0	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	-1	1	0	1	0	-
P_5	0	3	1	0	0	0	1	$\boxed{3}$
Δ_j		0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	
P_2	0	8	0	1	1	0	1	-
P_4	0	6	0	1	0	1	1	

[5] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 145.

P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
Δ_j		-3	0	0	0	0	-1	

$X_0 = (3,\ 0,\ 8,\ 6,\ 0,)$, $Y_{\min} = -3$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi misollarni simpleks usulda yeching.[6]

1. $$Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 30 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2,3,4)$$

2. $$Z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 22 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 30 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2,3)$$

3. $$Z = 7x_1 + 8x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 100 \\ x_1 + x_2 \le 80 \\ x_1 \le 40 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2)$$

4. $$Z = 3x_1 + 9x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \le 30 \\ -3x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2)$$

5. $$Z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2,3)$$

ChPM masalasi quyidagi ko’rinishda bo’lsin:

---

[6] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 142.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0, \qquad (1)$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$$

Bu masalada tenglamalar sistemasi keltirilmagan. Shu sababli undagi tenglamalarga $x_{n+1},\ x_{n+2},\ ...,\ x_{n+m} -$ sun'iy o'zgaruvchilar kiritib uni kengaytirilgan sistemaga aylantiramiz. U holda quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0, ..., x_{n+m} \ge 0, \qquad (2)$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ ... + c_nx_n + M(x_{n+1} + ... + x_{n+m}) \to \min.$$

Bu yerda, $M -$ yetarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilariga mos $P_{n+1},\ P_{n+2},\ ...,\ P_{n+m}$ vektorlar "**sun'iy bazis vektorlar**" deb ataladi. Berilgan (1) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

1-teorema. Agar kengaytirilgan (2) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni: $x_{n+i} = 0 \ \ (i = \overline{1, m})$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim berilgan (1) masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.

Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, u holda boshlang'ich masala yechimga ega bo'lmaydi.

Sun'iy bazis usuli maqsad funksiyaga jarima (penalty) termini kiritiladi qaysiki bazisga sun'iy o'zgaruvchilar kiritishga mo'ljallangan. Biz yana shartni minimallashtirish namunasidan metodni oydinlashtirish uchun foydalanamiz:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Oldingidek, standart shaklga keltiramiz va sun'iy o'zgaruvchlar kiritiladi. Lekin bu holatda qo'shimcha 1 muammo bosqich tashkil qilish o'rniga, maqsad funksiyaga qo'yilgan shart minimumga aylantiriladi.

$$Z' = 2x_1 + 3x_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min$$

bu yerda M eng katta musbat sonni ifodalaydi. Umuman, har bir sun'iy o'zgaruvchini ifodalovch bitta penalty termin bor. Kompyuter hisoblari uchun M programma chizig'ining yechimlari orasida vujudaga kelishi mumkin bo'lgan boshqa hamma sonlar uchun dominat yetarli katta son.

Agar M katta bo'lsa, musbat sun'iy o'zgaruvchini o'z ichiga olgan qandaydir bazis maqsad funksiya Z' qiymatini ham katta musbat songa olib boradi. Agar qandaydir bazis dastlabki chiziqli programmalash masalasining mumkin bo'lgan javobi bo'lsa, u holda o'rganilayotgan bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchilarni olmaydi va uning maqsad qiymati kichikroq bo'ladi. Chunki sun'iy o'zgaruvchilar ular bilan katta qiymatli bog'liqlikka ega, simpleks usul agar bu mavjud bo'lsa ularni bazisdan oxirida olib tashlaydi. Qandaydir ba'zis jarima muammosi bo'lgan yechim bo'ladi qaysiki bazis emas hamma sun'iy o'zgaruvchilar (bundan buyog'iga nol) ham orginal muammoga mumkin bo'lgan yechim bo'ladi.

Sun'iy bazis usulida maqsad funksiya 1 muammo bosqichida maqsad funksiyaning chegarasi sifatida olinishi mumkin. Sun'iy bazis usulining maqsad funksiyasi mavjud:

$$Z' = c^T x + M\sum_i a_i$$

Bu maqsaddan foydalanishga teng:

$$Z = M^{-1}c^T x + \sum_i a_i$$

Chegaralarni $M \to \infty$ sifatida olish 1 maqsad bosqichini beradi. Natijada 1 muommo bosqichi ko'rinishi Sun'iy bazis usuli ko'rinishidan faqat tepa qatordan farq qiladi. Shu sababli biz simpleks usulini misollarda tezroq ko'rib chiqamiz ikki bosqich usulini tekshirishni amalga oshirishga nisbatan.

Bizning misolda, jarima (penalized) muommo uchun dastlabki bazis bilan sun'iy o'zgaruvchilar quyidagini beradi.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	2	3	0	0	M	M	0
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	2	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Oldingidek, sun'iy o'zgaruvchilar uchun qisqartirilgan qiymatlar nol bo'lmaydi va muammo doimiy bazis terminida yozilishi mumkin.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	-5M+2	2M+3	M	0	0	0	-16M
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	$\boxed{2}$	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Birinchi takrorlashda x_1 kirayotgan o'zgaruvchi va a_2 chiqayotgan o'zgaruvchi. Ikki bosqich usulidagidek, sun'iy o'zgaruvchi bazisni tark etsa u ahamiyatsizga aylanadi va muammodan olib tashlanadi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (a_2 olib tashlangandan), biz quyidagicha bazis yechim olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	-8M+7	-1,5M+1	0	0	-11M-2
a_1	0	8	3/2	0	1	11
x_1	1	-2	-1/2	0	0	1
x_4	0	$\boxed{11}$	2	1	0	15

Ikkinchi takrorlashda x_2 kiritilayotgan o'zgaruvchi va x_4 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (a_1 ustun olib tashlangan-dan keyin chunki, u ahamiyatsiz) biz quyidagi yangi bazis javobni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	0	$-\frac{M+6}{22}$	$\frac{8M-7}{11}$	0	$-\frac{M+127}{11}$
a_1	0	0	1/22	-8/11	1	1/11
x_1	1	0	-3/22	2/11	0	41/11
x_2	0	1	2/11	1/11	0	15/11

Uchinchi takrorlashda x_3 kiritilayotgan o'zgaruvchi va a_1 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashganda keyin (a_1 ustun olib tashlangandan keyin chunki, u ahamiyatsiz), biz yangi bazis yechimni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	0	0	-5	-11

x_3	0	0	1	-16	2
x_1	1	0	0	-2	4
x_2	0	1	0	3	1

Joriy bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchini olmaydi, shuning uchun bu haqiqiy muammo uchun mumkin bo'lgan maqsad. To'rtinchi takrorlashda x_4 uchun qisqartirilgan qiymat bo'lishsiz shuning uchun u optimal bazis emas. Muvoznatlashish quyidagini beradi:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	5/3	0	0	-28/3
x_3	0	16/3	1	0	22/3
x_1	1	2/3	0	0	14/3
x_4	0	1/3	0	1	1/3

Bu bazis optimal. Kutilgandek, bu ikki bosqich usuldan olingan optimal bazis bilan bir xil[7].

Programmalarda bajarishda penalty uchun mos qiymatni tanlsh qiyin bo'lishi mumkin.

M muammoda boshqa qiymatlar uchun dominant bo'lishi uchun yetarlicha katta bo'lishi zarur, lekin u juda katta bo'lsa uni aylana bo'ylab hisoblashda jiddiy muammolar kelib chiqadi.

1-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching:

---

[7]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 156-159.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$
$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max.$$

Yechish: Masalada maqsad funksiyasiga qo'yilgan shartni minimumga aylantirib, sun'iy $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \ x_5 \ge 0, \ x_6 \ge 0,$$
$$Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \to \min.$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvaliga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	-5	-3	-4	1	M	M	a.k
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	M	3	1	3	2	2	1	0	$\boxed{1}$
P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	1,5
Δ_j		$6M$	$3M$+5	$\boxed{5M+3}$	$3M$+4	$3M$-1	0	0	
P_2	-3	1	$1/3$	1	$2/3$	$2/3$	$1/3$	0	3
P_6	M	1	$4/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-2/3$	1	$\boxed{\frac{3}{4}}$
Δ_j		M-3	$\boxed{\frac{4}{3}M+4}$	0	$-\frac{1}{3}M+2$	$-\frac{1}{3}M-3$	$-\frac{5}{3}M-1$	0	
P_2	-3	$3/4$	0	1	$3/4$	$3/4$	$1/2$	$-1/4$	$\boxed{1}$

P_1	-5	$3/4$	1	0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$3/4$	-
Δ_j		-6	0	0	$\boxed{3}$	-2	1-M	-3-M	
P_3	-4	1	0	$4/3$	1	1	$2/3$	$-1/3$	
P_1	-5	1	1	$1/3$	0	0	$-1/3$	$2/3$	
Δ_j		-9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M	

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng. Shuning uchun (1-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi:

$$X_0(1,\,0,\,1,\,0)\,,\qquad Z_{\min}=-9,\quad Z_{\max}=9\,.$$

Aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi. Sikllanish va undan qutilish usuli (ε-usul). Agar ChPMsida P_i bazis vektorlarga mos keluvchi birorta $x_i^0=0$ bo'lsa, ya'ni

$$P_0=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_mx_m \tag{3}$$

yoyilmadagi x_i lardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalasi **aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi** deyiladi va P_i bazis vektorlarga mos keluvchi bazis reja esa aynigan reja bo'ladi.

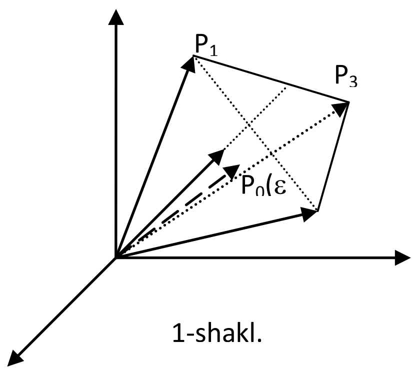
Yuqorida, simpleks usulni asoslash jarayonida chiziqli programmalashtirish masalalarini aynumagan deb faraz qilgan edik. Bu farazga ko'ra simpleks usulning har bir iteratsiyasidan so'ng chiziqli funksiyaning qiymati kamaya borishini va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng u o'zining optimal qiymatiga erishishi mumkinligini ko'rsatgan edik.

Agar masalaning bazis rejasi aynigan reja bo'lsa,

$$\theta=\frac{b_k}{a_{lk}}=0 \tag{4}$$

bo'lishi mumkin. U holda bir bazis rejadan ikkinchisiga o'tganda, chiziqli funksiyaning qiymati o'zgarmaydi. Ba'zan bunday masalalarni yechish jarayonida sikllanish holati, ya'ni ma'lum sondagi iteratsiyadan so'ng oldingi iteratsiyalardan birortasiga qaytish holati ro'y berishi mumkin. Sikllanish holati ro'y bergan masalalarda optimal reja hech qachon topilmaydi. Sikllanish odatda, bazis rejadagi birdan ortiq $x_i = 0$ bo'lgan holatlarda ro'y berishi mumkin. Birdan ortiq vektorlar uchun $\theta = 0$ bo'lganda bazisdan chiqariladigan vektorni to'g'ri aniqlash sikllanish holatini oldini olishda katta ahamiyatga egadir. Bundan ko'rinadiki, aynigan masalalarni yechishga moslashtirilgan usullar masalaning optimal yechimini topishga ishonch bildirib bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashning yagona yo'lini ko'rsatishi kerak.

Aynigan ChPMsining geometrik tasvirini 1- shakldan ko'rish mumkin. Bunda P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tuzilgan qavariq konusning sirtida yotibdi. Shuning uchun P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi sifatida ifodalab bo'lmaydi, lekin uni P_1 va P_2 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash uchun $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$ yoyilmadagi P_3 vektorning koeffisiyenti $x_3 = 0$ bo'lishi kerak.



1-shakl.

Agar P_3 vektorni $\varepsilon > 0$ ga siljitib P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichiga kiritsak, u holda uni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'ladi. P_3 vektorni qavariq konusning ichiga siljitish uchun ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son olib, P_1, P_2, P_3 vektorlarning

$$\varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3$$

kombinatsiyasini tuzamiz va uni masalaning

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_0$$

cheklamalarining o'ng tomoniga qo'shib yozamiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 = P_0(\varepsilon) \quad (5)$$

Hosil bo'lgan $P_0(\varepsilon)$ vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichida yotadi (1-shakl). Demak, P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Xuddi shuningdek, umumiy holda berilgan masalaning

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + x_mP_m + ... + P_nx_n = P_0 \quad (6)$$

cheklamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} &P_1x_1 + P_2x_2 + ... + x_mP_m + ... + P_nx_n = \\ &= P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ... + \varepsilon^m P_m + ... + \varepsilon^n P_n = P_0(\varepsilon) \end{aligned} \quad (7)$$

Faraz qilaylik, $P_1, P_2, ..., P_m$ bazis vektorlar bo'lib, ular B matrisani tashkil qilsin. U holda

$$\overline{X} = B^{-1}P_0 \geq 0 \quad (8)$$

berilgan masalaning yechimi va

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0(\varepsilon) \geq 0 \quad (9)$$

o'zgartirilgan (5) chegaralovchi shartli masalaning yechimi bo'ladi.

$$\overline{X}_j = B^{-1}P_j \quad (10)$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun (8) ni ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0 + \varepsilon B^{-1}P_1 + \varepsilon^2 B^{-1}P_2 + ... + \varepsilon^m B^{-1}P_m + ... + \varepsilon^n B^{-1}P_n =$$

$$=\overline{X}+\varepsilon X_1+\varepsilon^2 X_2+\ldots+\varepsilon^m X_m+\ldots+\varepsilon^n X_n. \qquad (11)$$

Demak, sistemaning o'ng tamoni $\overline{b_i}(\varepsilon)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{b_i}(\varepsilon)=\overline{b_i}+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^j a_{ij} \qquad (12)$$

$$\overline{b_i}(\varepsilon)=\overline{b_i}+\varepsilon^i+\sum_{j=m+1}^{n}\varepsilon^j a_{ij} \qquad (13)$$

ε kichik son bolgani uchun $\overline{b_i}(\varepsilon)>0$.

Simpleks usulini qo'llash jarayonida bazisdan chiqariladigan P_l vektorni aniqlash uchun

$$\theta_0=\frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}}=\min_i\frac{\overline{b_i}(\varepsilon)}{a_{ik}}=\frac{b_l+\varepsilon^i+\sum_{j=m+1}^{n}\varepsilon^j a_{ij}}{a_{lk}}>0 \qquad (14)$$

formuladan foydalanamiz. Farazga asosan $\frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$ nisbat $i=l$ da minimumga erishadi. Agar

$$\theta_0=\min_i\frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}, \qquad (a_{ik}>0)$$

qiymat, $i=l$ indeks uchun o'rinli bo'lsa, u holda P_l bazisdan chiqariladi.

Bazisga kiritiladigan P_k tanlangandan so'ng, simpleks jadval ma'lum yo'l bilan almashtiriladi. Natijada topilgan yangi $\overline{X}(\varepsilon)$ bazis reja yetarli darajada kichik ε uchun aynimagan reja bo'ladi.

Amalda aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi juda kam uchraydi. Quyida biz keltiradigan masala amerika matematigi Bil tomonidan tuzilgan.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7},$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \rightarrow \min.$$

Bu masala aynigan masala bo'lib, uni yuqorida keltirilgan "to'g'rilash" usulini qo'llamasak yechganda sikllanish holati ro'y beradi. Simpleks usulning 7- iteratsiyasidan so'ng 2-iteratsiyaga qaytish holati ro'y beradi. Agar yuqorida ko'rilgan "to'g'rilash" usulini qo'llamasak, bu sikllanish holati cheksiz ravishda takrorlanishi mumkin, demak masalaning optimal yechimini topish imkoniyati bo'lmaydi. Endi masalani "to'g'rilash" usulini qo'llab yechamiz. Eng avval berilgan masaladagi sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

Bu yerda ε kichik musbat son bo'lib, uni shunday tanlash mumkinki, natijada tenglamalarning o'ng tomoniga ε ning faqat birinchi va ikkinchi darajasini qo'shish yetarli bo'lsin. Masalani simpleks jadvalga joylashtirib yechamiz:

I.

P_b	C_b	P_0	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7

P_5	0	$\frac{\varepsilon}{4}-60\varepsilon^2$	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
P_6	0	$\frac{\varepsilon}{2}-90\varepsilon^2$	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1

II.

P_1	-3/4	$\varepsilon-240\varepsilon^2$	1	-240	-4/25	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	30	3/50	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+160\varepsilon^2$	0	30	7/50	-33	-3	0	0

III.

P_1	-3/4	ε	1	40	8/25	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+150\varepsilon^2$	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	-3/4	$\varepsilon-160\varepsilon^2$	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
P_7	0	$1-500\varepsilon^2$	0	-500	0	250	100/3	-50/3	1

		$-\frac{3\varepsilon}{4}+110\varepsilon^2$	0	-40	0	2	5/3	-7/3	0

V.

P_1	-3/4	$\frac{2}{125}+\varepsilon-168\varepsilon^2$	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
P_3	-1/50	1	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	$\frac{1}{250}-2\varepsilon^2$	0	-2	0	1	2/15	-1/15	1/250
		$-\frac{1}{125}-\frac{3\varepsilon}{4}-$ $-114\varepsilon^2$	0	-36	0	0	7/5	-11/5	3/125

VI.

P_1	-3/4	$\frac{1}{125}+\varepsilon-180\varepsilon^2$	1	-180	0	6	0	2	1/25
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	$\frac{3}{100}-15\varepsilon^2$	0	-15	0	15/2	1	-1/2	3/100
		$135\varepsilon^2-\frac{1}{20}-\frac{3\varepsilon}{4}$	0	-15	0	-21/5	0	-3/2	-1/100

Shunday qilib, yuqoridagi “to’g’irlash” usulini qo’llab masalani yechganda 6-bosqichda optimal yechim topiladi.

$$X(\varepsilon) = (180\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{25};\ 0;\ 500\varepsilon^2 + 1;\ 0;\ \frac{3}{100} - 15\varepsilon^2),$$

$$Y_{\min}(\varepsilon) = -135\varepsilon^2 - \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{1}{20}.$$

Berilgan masalani yechimini topish uchun $\varepsilon = 0$ deb qabul qilamiz.

Javob: $X_0 = (\frac{1}{25};\ 0;\ 1;\ 0;\ \frac{3}{100}),\ Y_{\min} = -\frac{1}{20}.$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi masalalarni sun'iy bazis usuli bilan yeching.[8]

1. $$Z = -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 40 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

2. $$Z = -4x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

[8] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 156-159.

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

10. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.
11. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA, 2010.
12. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, NY 2005
13. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
14. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O’quv qo’llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017, 386 bet.
15. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017, 746 стр.
16. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming, Springer, 2008
17. Safayeva Q., Shomansurova F. “Matematik programmalashtirish fanidan mustaqil ishlar majmuasi”. O’quv qo’llanma. T., 2012.
18. Safayeva Q., Mamurov I., Shomansurova F. “Matematik programmalash fanidan masalalar to’plami”. T., 2013.

6-mavzu. Transport masalasi. Potensiallar usuli

Reja

6.1. Transport masalasining qo’yilishi va uning matematik modeli.

6.2. Transport masalasi yechimining xossalariga doir teoremalar.

6.3. Transport masalasining boshlang’ich joiz rejasini topish usullari.

6.4. Potensiallar usuli.

6.5. Bazis yechimning optimallik sharti.

6.6. Ochiq modelli transport masalasi.

6.7. Aynigan TM ni ε-usul bilan yechish.

Tayanch so'z va iboralar. Band katakchalar, bo'sh katakchalar, harajatlar matrisasi, yopiq kontur, potensiallar, potensial tenglama, ochiq modelli transport masalasi, "soxta" ta'minotchi, "soxta" iste'molchi. Yopiq modelli transport masalasi, band katakchalar, ochiq modelli transport masalasi, "shimoliy-g'arb burchak" usuli, "minimal harajat" usuli.

Transport masalasi – chiziqli programmalashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo'llanish sohasi juda kengdir.

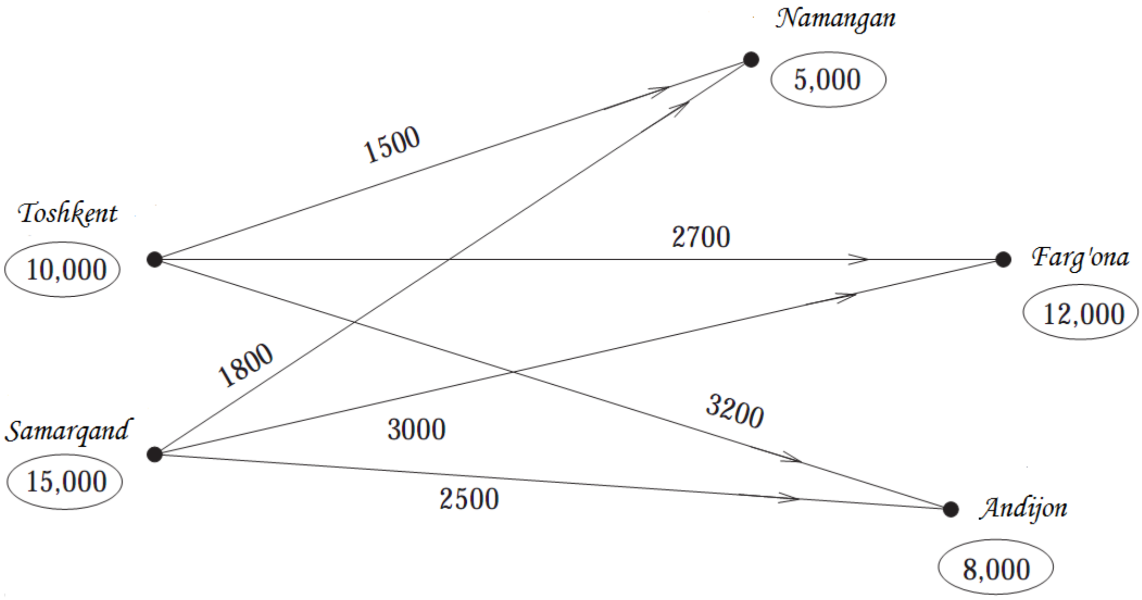
Zahirasida b_i birlik mahsuloti bo'lgan i-ta'minotchidan mavjud bo'lgan istemolchilarga zahirasidagi mahsulotni to'la realizatsiya qilish shatri

$$\sum_j x_{i,j} = b_i$$

bu yerda $x_{i,j}$ – i-ta'minotchidan j-is'temolchiga tashilgan mahsulot hajmi.

1-misol. Faraz qilaylik, Toshkent va Samarqandga keltirilgan Xitoyda ishlab chiqariluvchi o'yinchoqlar Namangan, Farg'ona va Andijonga transport orqali tarqatilmoqda. Bunda Toshkentga 10000 ta va Samarqandga 15000 ta o'yinchoq keltirilgan bo'lib, Namanganga 5000 ta, Farg'onaga 12000 ta va Andijonga esa 8000 ta jo'natish rejalashtirilgan. Bitta o'yinchoqni yetkazib berishdagi transport harajatlari ta'minotchi va is'temolchilar orasidagi masofalarga to'g'ri proporsional bo'lib, masalaning tarmoq grafik ko'rinishi quyida keltirilgan.[9]

[9]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 275-276.



Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli. m ta A_i ta'minotchilarda a_i miqdordagi bir xil mahsulotni n ta B_j iste'molchilarga mos ravishda b_j miqdordan yetkazib berish talab qilinsin. Har bir i -ta'minotchidan har bir j -iste'molchiga bir birlik mahsulotni tashishga sarf qilinadigan yo'l harajati c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha mahsulotlar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l harajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i -ta'minotchidan j -iste'molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan mahsulot miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz. U holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahiralar miqdori**
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	

A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talablar miqdori	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Bunda harajatlarning umumiy qiymati

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalaning matematik modeli quyidagi ko’rinishni oladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{1}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Jadvaldan va masalaning modelidan $0 \le x_{ij} \le \min\left(a_i, b_j\right)$ tengsizlikning bajariliahi ko'rinib turibdi.

Transport masalalarii ikki turga ajratib o'rganiladi:

1. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday masala **yopiq modelli transport masalasi** deyiladi.

2. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ne \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday masalalar **ochiq modelli transport masalasi** deyiladi.

(1)-(3) masala uchun quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. Talablar hajmi takliflar hajmiga teng bo'lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo'ladi.[10]

Transport masalasi matematik modeli tenglamalar sistemasidagi bazis vektorlar sistemasining o'lchovini aniqlaymiz. Buning uchun sistema asosiy matrisasining rangini aniqlash kerak.

Agar x_{ij} o'zgaruvchilarni

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}$$

ko'rinishda joylashtirsak, u holda transport masalasining cheklamalar matrisasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$A = \begin{pmatrix} m\left\{\begin{matrix} \overbrace{1\ 1\ ...\ 1}^{n} & \overbrace{0\ 0\ ...\ 0}^{n} & ... & \overbrace{0\ 0\ ...\ 0}^{n} \\ 0\ 0\ ...\ 0 & 1\ 1\ ...\ 1 & ... & 0\ 0\ ...\ 0 \\ .... & & & \\ 0\ 0\ ...\ 0 & 0\ 0\ ...\ 0 & ... & 1\ 1\ ...\ 1 \end{matrix}\right. \\ n\left\{\begin{matrix} 1\ 0\ ...\ 0 & 1\ 0\ ...\ 0 & ... & 1\ 0\ ...\ 0 \\ 0\ 1\ ...\ 0 & 0\ 1\ ...\ 0 & ... & 0\ 1\ ...\ 0 \\ .... & & & \\ 0\ 0\ ...\ 1 & 0\ 0\ ...\ 1 & ... & 0\ 0\ ...\ 1 \end{matrix}\right. \end{pmatrix}$$

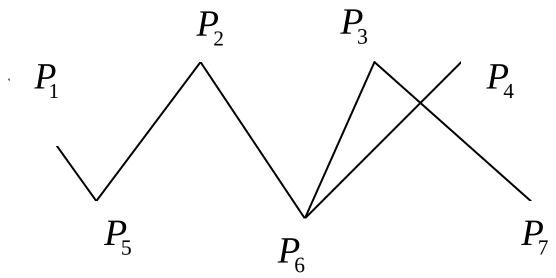
[10]David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 145-146.

Bu matrisaning rangi: $rang(A) = m + n - 1$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan ham, matrisada $m + n$ ta satr bo'lib ular chiziqli bog'liq. Chunki birinchi m ta satrni qo'shib undan oxirgi n ta satr yig'indisini ayirsak nol vektorni hosil qilamiz. Bu matrisaning ixtiyoriy $m + n - 1$ satrini olsak chiziqli erkli vektorlar sistemasi hosil bo'ladi.

Demak, masalaning optimal yechimida musbat x_{ij} lar soni ko'pi bilan $m + n - 1$ ta bo'ladi.

Transport masalasi rejalari ko'p takrorlanish xususiyatiga ega.

1-ta'rif. P_i nuqtalarning (punktlarning) chekli $P = \{P_1, P_2, ..., P_l\}$ to'plami va har bir elementi yoy deb ataluvchi tartiblanmagan (P_i, P_j) juftliklarning Ω to'plami berilgan bo'lsin. (P_i, P_j) yoy P_i va P_j nuqtalarni tutashtiradi, bu nuqtalar esa (P_i, P_j) yoyning oxiri deb ataladi. (P, Ω) juftlik esa **transport tarmog'i** deb ataladi. Masalan,



rasmda elementlari 7 ta nuqtadan iborat $P = \{P_1, P_2, ..., P_7\}$ to'plam va oltita:

$$(P_1, P_5), (P_2, P_5), (P_2, P_6), (P_3, P_6), (P_3, P_7), (P_4, P_6)$$

yoylarni o'zichiga oluvchi Ω to'plam tasvirlangan.

2-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ($P_{i_l} \in P$, $l = 0, 1, ..., k$) ixtiyoriy chekli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar har qanday $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})$, $r = 0, 1, ..., k-1$, juftlik yoy bo'lib ($(P_{i_r}, P_{i_{r+1}}) \in \Omega$), bu juftlik $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlikda ko'pi bilan bir marta uchrasa, u holda $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlik **marshrut** (yo'nalish) deb ataladi.

Yuqoridagi rasmda ikkita marshrut bor: $P_1P_5P_2P_6P_4$, $P_1P_5P_2P_6P_3P_7$.

3-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}P_{i_0}$ ko'rinishdagi **marshrut sikli** deb ataladi.

Demak, marshrutda boshlang'ich holatga qaytilsa u **sikl** deb ataladi

Rasmdagi marshrutda sikl yo'q, ammo unga (P_4, P_7) yoy qo'shilsa, u holda bu marshrutda $P_3P_7P_4P_6P_3$ ko'rinishdagi sikl hosil bo'ladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch rejani topishdan boshlanadi.

Yopiq transport masalasining boshlang'ich tayanch rejasini topishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi bilan tanishib chiqamiz.

Boshlang'ich joiz rejani topish usullari. ***Masalaning aynimagan joiz rejasi*** $m+n-1$ ***ta musbat komponentalarni o'z ichiga oladi.***

Shunday qilib, transport masalasining aynimagan joiz rejasi biror usul bilan topilgan bo'lsa, matrisaning $m+n-1$ ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi.

Agar transport masalasining shartlari va uning joiz rejasi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} lar joylashgan kataklar "**band kataklar**", qolganlari "**bo'sh kataklar**" deyiladi.

Yechim aynimagan bazis yechim bo'lishi uchun band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lib, u yerda sikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arbiy burchak usuli. Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin.

a_i \ b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

Ma'lumki, har bir bo'sh katakka x_{ij} noma'lumlardan biri to'g'ri keladi. Bu usulda bo'sh kataklrni x_{ij}^0 qiymatlar bilan to'ldiriladi deb faraz qilamiz.

Jadvalning shimoliy-g'arbiy burchagiga x_{11} o'zgaruvchi to'g'ri keladi. $x_{11}^0 = \min\{a_1, b_1\}$ bo'lsin. Agar $x_{11}^0 = a_1 \ (a_1 \le b_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchining barcha mahsuloti birinchi iste'molchiga jo'natilgan bo'ladi. Demak, $x_{1j}^0 = 0, \ j = \overline{1,n}$ bo'ladi.

II qadamda $x_{21}^0 = \min\{b_1 - a_1, a_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz. Bunda, agar $x_{21}^0 = b_1 - a_1 \ (b_1 - a_1 \le a_2)$ bo'lsa, u holda $x_{s1}^0 = 0, \ s = \overline{3,m}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib band kataklardagi x_{ij} larning qiymatlarini aniqlab olamiz.

Agar $x_{11}^0 = b_1 \ (b_1 \le a_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchida $a_1 - b_1$ miqdorda mahsulot qolgadi. Demak, $x_{i1}^0 = 0, \ i = \overline{2,m}$ bo'ladi. II qadamda $x_{12}^0 = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz va hakozo.[11]

2-misol. Shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib, transport masalasining boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal xarajatlar usuli. Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun x_{ij}^0 qiymat avvalambor yo'l harajati eng kichik bo'lgan katakka, ya'ni $\min\limits_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \{c_{ij}\}$ shart

[11] David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 148-149.

o'rinli bo'ladigan katakka yoziladi. Masalan, $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\}=c_{pq}$ bo'lsin. U holda $x_{pq}^0=\min\{a_p, b_q\}$ qiymat aniqlanadi. $x_{pq}^0=\min\{a_p, b_q\}$ $(a_p\le b_q)$ bo'lsin. Demak, $x_{pj}=a_p,\ j=1, 2, ..., q-1, q+1, ..., n$ bo'ladi. Bundan keyingi qadamlarda ham $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\}=c_{pq},\ i\ne p,\ j\ne q$ shart asosida x_{ij}^0 qiymatlar aniqlanib boriladi. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni sikllanishga tekshirish shart.

3-misol. Minimal harajatlar usuli bilan boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari **L.V.Kantorovich** va **M.K.Gavurin** tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerikalik olim **Dansig** tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul **modifitsirlangan taqsimot usuli** deb yuritiladi.

Transport masalasining optimal yechimini topishda foydalaniladigan potensiallar usuli simpleks usulining soddalashtirilgan varianti hisoblanadi.

Bu usul bilan tanishishdan oldin **aynigan** va **aynimagan** transport masalasi tushunchalarini kiritishimiz kerak.

Ma'lumki, agar ChPM hech bo'lmaganda bitta aynigan tayanch yechimga ega bo'lsa, u holda bu masala **aynigan ChPMsi** deb ataladi.

1-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ tayanch rejadagi (yechimdagi) musbat komponentalar soni $rangA = m$ ga teng bo'lsa, u holda bu reja **aynimagan tayanch reja**, aks holda esa u **aynigan tayanch reja** deyiladi.

Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin: $b_j -$talablar miqdori; $a_i -$takliflar miqdori.

b_j a_i	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

1-teorema. Agar talablarning qismiy yig'ndisi takliflarning qismiy yig'indisiga teng, ya'ni $\sum_{i\in G} a_i = \sum_{j\in H} b_j$, $G \subset M = \{1, 2, ..., m\}$, $H \subset N = \{1, 2, ..., n\}$ bo'lsa, u holda bu transport masalasi **aynigan transport masalasi** deyiladi.

Aynimagan transport masalasini qaraymiz. Ma'lumki, bu masalaning matematik modeli kanonik ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0, \tag{2}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{3}$$

Bu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$U_i + V_j \leq c_{ij}, \tag{4}$$

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} U_i a_i + \sum_{j=1}^{n} V_j b_j \to \max. \tag{5}$$

Ikkilanish nazariyasiga asosan agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo'lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo'ladi. Bu yerda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda "**ta'minotchi va iste'molchilarning potensiallari**" deyiladi.

Bu nazariyaga asosan transport masalasi uchun quyidagi teoremani keltirish mumkin.

2-teorema. Agar transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechimi uchun

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow U_i + V_j = c_{ij}, \tag{6}$$

$$x_{ij}^* = 0 \Rightarrow U_i + V_j \leq c_{ij}. \tag{7}$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechim optimal yechim bo'ladi.

(6) va (7) shartlar transport masalasi uchun **optimallik shartlari** deb ataladi.

Shunday qilib, navbatdagi tayanch yechimni optimallikka tekshirish uchun, avval, (6) shart yordamida potensiallar sistemasi quriladi va so'ngra (7) shartning bajarilishi tekshiriladi.

Masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: $S_i -$ ta'minotchilar joylashgan nuqta; $Q_j -$iste'molchilar joylashgan nuqta. $P = S \cup Q$. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (S_i, Q_j) \in \Omega$. (P, Ω) juftlik transport tarmog'i.

Potensiallar usulida optimal yechimni topish algoritmi:

1. $\{x_{ij}^0\}$ boshlang'ich tayanch yechim topiladi. Masalan,

$$Q_{j_0}S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}...Q_{j_{k-1}}S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_0} \tag{8}$$

marshrut topiladi;

2. (6) shart asosida U_i va V_j potensiallardan

$$V_{j_0}+U_{i_1}=c_{i_1 j_0},\ V_{j_1}+U_{i_1}=c_{i_1 j_1},\ ...,\ V_{j_k}+U_{i_k}=c_{i_k j_k},\ V_{j_k}+U_{i_0}=c_{i_0 j_k}, \tag{9}$$

tenglamalar sistemasini tuziladi. Bunda $n+m-1$ ta band katak uchun $n+m-1$ ta chziqli tenglama va $n+m$ ta noma'lum hosil bo'ladi. Noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ortiq bo'lgani uchun bitta erkli noma'lumga ixtiyoriy qiymat, masalan nol, qiymat berilib qolganlari mos tenglamalardan topiladi;

3. Bo'sh kataklar uchun (7) shart tekshiriladi:

a) agar barcha bo'sh kataklar uchun (7) shart bajarilsa, u holda tayanch yechim optimal bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi;

b) agar ba'zi bo'sh kataklar uchun (7) shart bajarilmasa, u holda tayanch yechim optimal bo'lmaydi va tayanch yechimni almashtirish jarayoni amalga oshiriladi;

4. Tayanch yechimni almashtirish jarayonini amalga oshirish uchun $x_{ij}^0=0 \Rightarrow U_i+V_j \le c_{ij}$ shart o'rinli bo'lmagan bo'sh kataklardan biri

$$\max_{\Delta_{ij}>0}(\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}) \tag{10}$$

shart asosida tanlanadi va u band katakka aylantiriladi. Masalan,

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij}=\Delta_{i_0 j_0}$$

bo'lsin. Demak, (8) marshrutga (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni qo'shish kerak. U holda (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni o'zida saqlovchi

$$S_{i_0}Q_{j_0}S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}...Q_{j_{k-1}}S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_0}$$

sikl hosil bo'ladi. Bu siklga

$$x_{i_0 j_0},\ x_{i_1 j_0},\ x_{i_1 j_1},\ \ldots,\ x_{i_k j_k},\ x_{i_0 j_k}.$$

ketma-ketlik mos keladi. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned}
&x^1_{i_0 j_0} = x^0_{i_0 j_0} + \theta = \theta,\\
&x^1_{i_1 j_0} = x^0_{i_1 j_0} - \theta,\\
&x^1_{i_1 j_1} = x^0_{i_1 j_1} + \theta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x^1_{i_k j_k} = x^0_{i_k j_k} + \theta,\\
&x^1_{i_0 j_k} = x^0_{i_0 j_k} - \theta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Boshqa barcha $(i,\ j)$ juftliklar uchun $x^1_{ij} = x^0_{ij}$. (11) formula yordamida topilgan $\{x^1_{ij}\}$ yechim tayanch yechim bo'lishi uchun θ ni

$$\theta = \min_{0 \le r \le k} x^0_{i_{r+1} j_r} \tag{12}$$

shart asosida tanlash yetarli.[12]

Bu jarayonni tayanch yechim uchun (6), (7) optimallik sharti bajarilguncha davom ettiramiz.

Bu jarayon chekli son marta qaytarilgandan so'ng optimal yechim hosil bo'ladi. Chunki transport masalasi uchun quyidagi teoremalar o'rinli.

3-teorema. Har qanday yopiq modelli transport masalasining optimal yechimi mavjud.

4-teorema. Agar barcha $a_i,\ b_j$ sonlar butun bo'lsa, u holda transport masalasining ixtiyoriy tayanch yechimi butun sonlardan iborat bo'ladi.

1-misol. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini toping.

[12]David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 154-155.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1	4
250	2	7	10	6	11
200	8	5	3	2	2
300	11	8	12	16	73

Yechish: Boshlang'ich tayanch yehimni minimal xarajatlar usuli bilan topamiz.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1 100	4 0
250	2 200	7 50	10	6	11
200	8	5	3	2	2 200
300	11	8 150	12 100	16	73 50

Bu jadvalda band kataklar soni $n+m-2$ ta. Shuning uchun (a_1, b_5) katakka 0 yozib uni band katakka aylantiramiz. So'ngra band kataklardan foydalanib $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib, U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -16	7 -8	4 -1	1 100-θ	4 0+θ	0
250	2 200	7 50-θ	10 1	6 θ 3	11 1	8
200	8 -16	5 -8	3 -2	2 -3	2 200	-2
300	11 -8	8 150+θ	12 100	16 -6	73 50-θ	9
V_j	-6	-1	3	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3$ bo’lganligi sababli (a_2, b_4) katakka θ sonni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 1-jadvalni hosil qilamiz.

Endi $\theta = \min(100, 50, 50) = 50$ **asosida yangi bazis rejaga o'tib,** $U_i + V_j = c_{ij}$ **potensial tenglamalar sistemasini tuzib** U_i **va** V_j **qiymatlarini va bu asosida** $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ **ning qiymatini hisoblaymiz. U holda quyidagi jadval hosil bo'ladi.**

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -5	4 2	1 50	4 50	0
250	2 200	7 0	10 1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -5	3 1	2 -3	2 200	-2
300	11 -14	8 200	12 100	16 -9	73 -3	6
V_j	-3	2	6	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 2$. Shuning uchun (a_1, b_3) katakka θ parametrni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 3a-jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda

$$\theta = \min\{0,\ 50,\ 100\} = 0.$$

Bu asosda yangi bazis yechimni jadvalga joylashtiramiz. Jadvalda keltirilgan bazis yechim optimal yechim bo'ladi, chunki barcha bo'sh katakchalarda $\Delta_{ij} \le 0$.

b_j / a_i	200	200	100	100	250
100	10 -13	7 -7	4 θ	1 50-θ	4 50
250	2 200	7 0-θ -2	10 -1	6 50+θ	11 -2
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200
300	11 -6	8 200+θ	12 100-θ	16 -7	73 -1

3-jadval

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i

100	10 -13	7 -7	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -2	10 -1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200	-2
300	11 -6	8 200	12 100	16 -7	73 -1	8
V_j	-3	0	4	1	4	

Shunday qilib, uchinchi qadamda quyidagi optimal yechimga ega bo’ldik:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z_{\min} = 4150.$$

Ochiq modelli transport masalasi. Agar talab va takliflarning umumiy miqdorlari teng bo’lmasa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

shart bajarilsa, u holda bu masala “**ochiq modelli transport masalasi**” deyiladi. Ochiq modelli masalaning optimal yechimini topish uchun yopiq modelga keltiriladi va potensiallar usuli qo’llaniladi.

Ochiq modelli masalani yopiq modelliga keltirish uchun qo’shimcha “soxta” ta’minotchi yoki “soxta” iste’molchi kiritiladi, ularning zahirasi yoki talab hajmi

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{yoki} \quad b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bo’ladi. Soxta ta’minotchidan real iste’molchilarga yoki real ta’minotchilardan soxta iste’molchilarga amalda mahsulot tashilmagani uchun yo’l harajatlari nolga teng qilib olinadi. Natijada bu yerda yopiq modelli masala hosil bo’ladi.

2-misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yeching.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	

Yechish: $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$ bo’lgan hol uchun masalani yopiq modelli masalaga aylantiramiz: $B_6 = 100$. So’ngra potensiallar usulini qo’llaymiz.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**						**Zahira**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	7	4	1	4	0	100
A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	100	

Aynigan transport masalasi. $\varepsilon -$**potensiallar usuli.** Aynigan transprot masalasida tayanch rejasidagi musbat komponentalar soni $k < m+n-1$ bo'ladi va bu tayanch reja aynigan reja bo'ladi. Bunday rejani aynimagan rejaga aylantirish uchun unga $m+n-1-k$ ta nol element kiritish mumkin. Ammo bu nol elementlarga mos x_{ij} noma'lumlar band kataklarga mos x_{ij} noma'lumlar o'zaro chiziqli bog'liq vektorlar esa chiziqli erkli bo'lishi kerak. Bu holatni nazorat qilish qiyin. Shu sababli aynigan transport masalasidagi siklni yo'qotib uni aynimagan transport masalasiga aylantirish kerak. Bunga erishish uchun quyidagi $\varepsilon -$potensiallar usulini qo'llash mumkin.

$\varepsilon -$**potensiallar usuli.** Ma'lumki, bir nechta a_i larning yig'indisi (hammasi emas) bir nechta b_j larning yig'indisiga teng bo'lsa transport masalasini aynigan transport masalasi deb ataymiz.

Masalada ayniganlikni yo'qotish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig'indilarning o'zaro teng bo'lmasligiga erishish kerak. Buning uchun a_i va b_j larning qiymatini biror kichik songa o'zgartirish kerak. Masalan, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonni olib, a_i va b_j larni o'zgartiramiz, ya'ni ε masala tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \quad (i = \overline{1,m}), \\ \overline{b_j} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}), \\ \overline{b_n} = b_n + m\varepsilon, \end{array}\right\} \qquad (13)$$

ε yetarlicha kichik son bo'lganligi sababli hosil bo'lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon = 0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

3-misol. Berilgan aynigan transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	3	4	5	3
4	4	5	6	3

3	3	2	7	6
8	5	9	1	3

Yechish: (13) munosabatlardan foydalanib, quyidagi ε masalani hosil qilamiz:

a_i \ b_j	3	4	5	3+3ε
4+ε	4	5	6	3
3+ε	3	2	7	6
8+ε	5	9	1	3

Ushbu masalani yechib, $X(\varepsilon)$ rejani topamiz. Bundan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} X(\varepsilon) = X^0$.

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

19. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.
20. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA, 2010.
21. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, NY 2005
22. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
23. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O’quv qo’llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017, 386 bet.
24. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017, 746 стр.
25. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming, Springer, 2008
26. Safayeva Q., Shomansurova F. “Matematik programmalashtirish fanidan mustaqil ishlar majmuasi”. O’quv qo’llanma. T., 2012.

27. Safayeva Q., Mamurov I., Shomansurova F. “Matematik programmalash fanidan masalalar to’plami”. T., 2013.